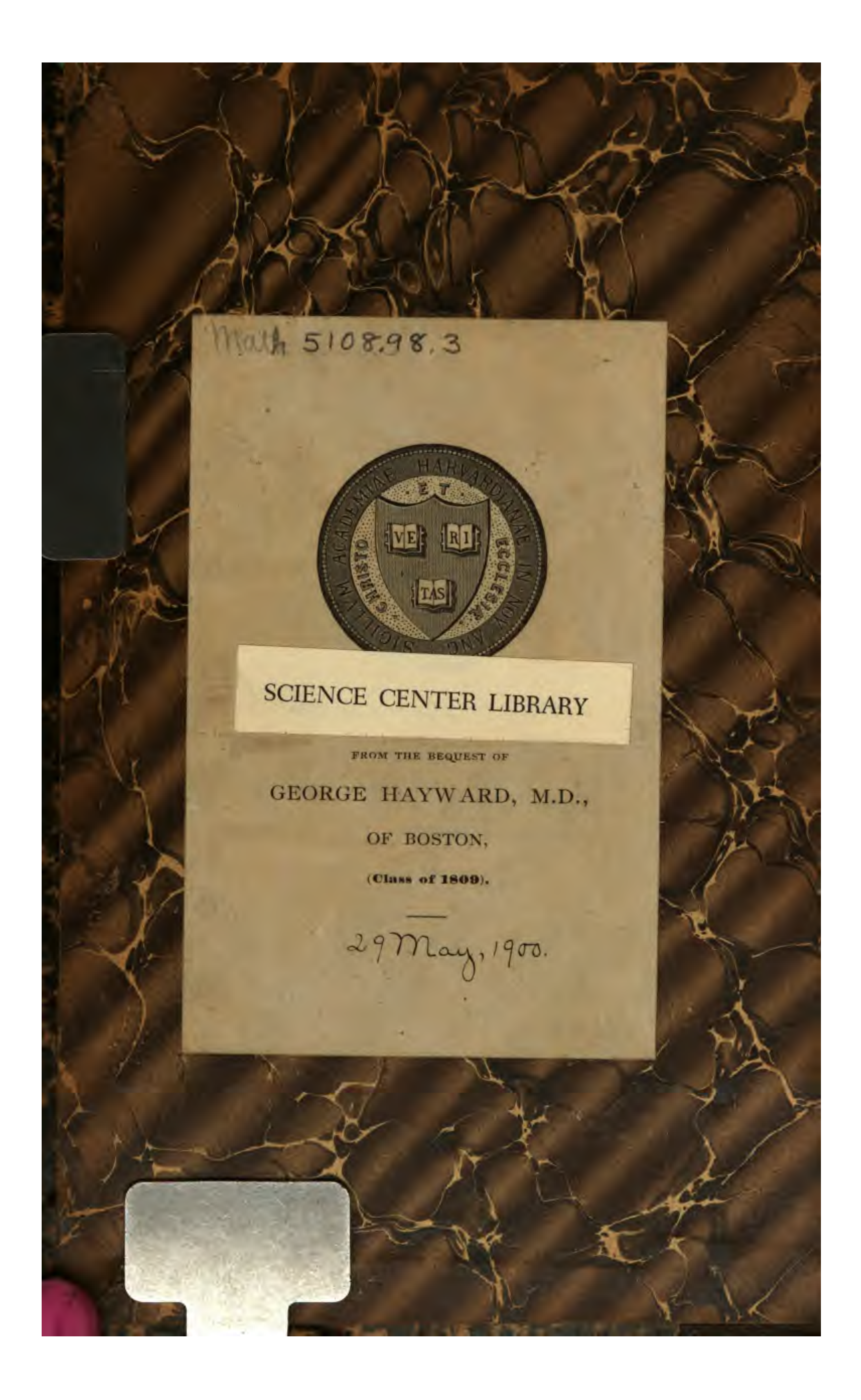
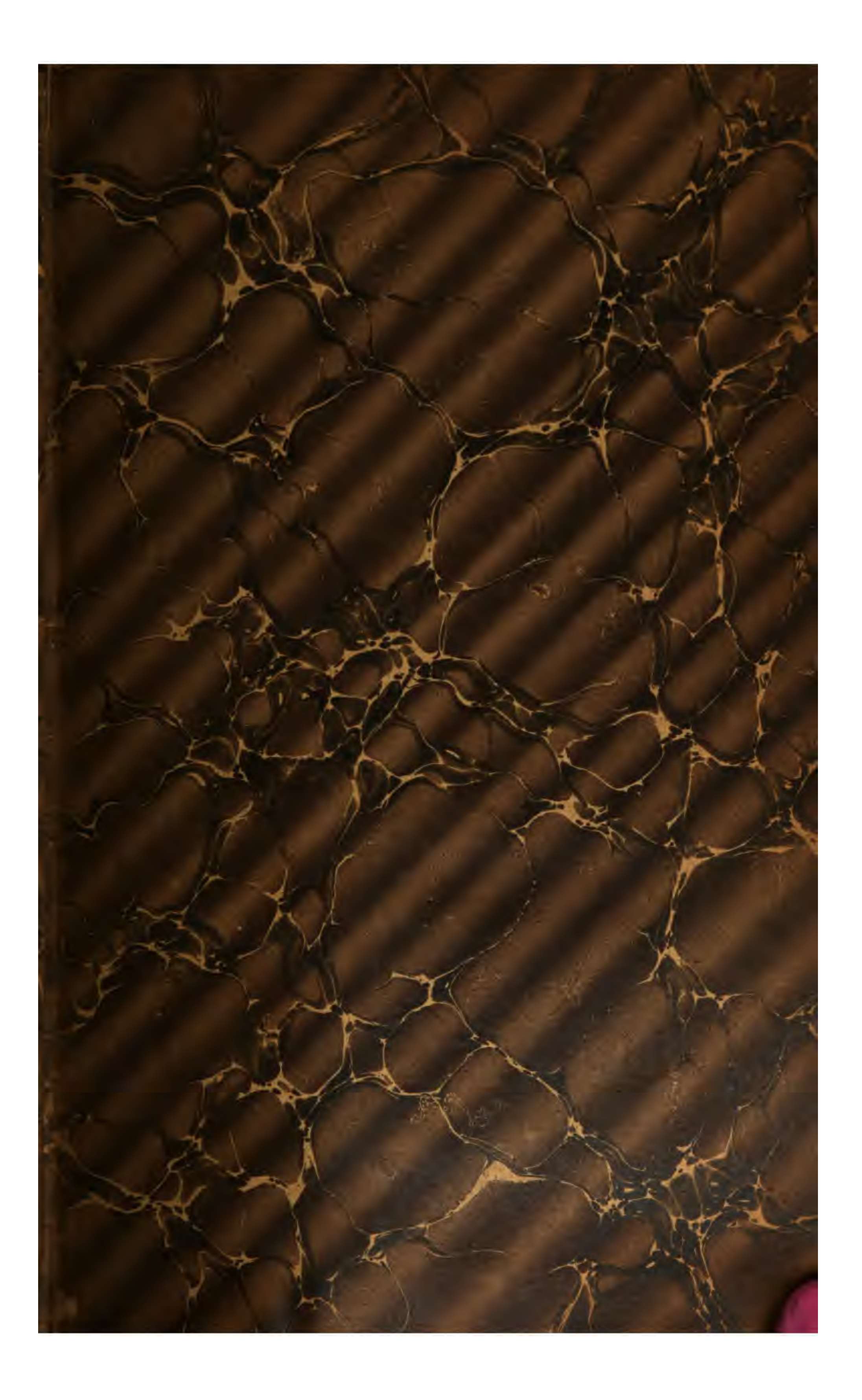






# COURS

DE

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

## OUVRAGES DES MÊMES AUTEURS

---

### DE M. B. NIEWENGLOWSKI

**Cours d'algèbre**, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'Ecole normale supérieure et à l'Ecole polytechnique. 4e édition. Paris, Armand Colin. . . . . . 12 fr. »

**Cours de géométrie analytique**, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du Gouvernement. Paris, Gauthier-Villars.

| | | |
|---|---|---|
| TOME I. — | Sections coniques . . . . . . . . . . . | 10 fr. » |
| TOME II. — | Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. . . . | 8 fr. » |
| TOME III. — | Géométrie de l'espace ; avec une note sur les transformations en géométrie, par M. E. Borel . . . . . . . . . . . | 14 fr. » |

---

### DE M. L. GÉRARD

**Manuels des baccalauréats de l'enseignement secondaire classique et moderne.** En vente à la Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois, Paris. On vend séparément :

| | |
|---|---|
| Arithmétique. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 fr. 50 |
| Géométrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 2 fr. 50 |
| Trigonométrie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 fr. 25 |
| Géométrie descriptive. . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 fr. 75 |
| Compléments de géométrie descriptive . . . . . . . | 0 fr. 75 |

---

**Bulletin de mathématiques spéciales**, publié par MM. L. GÉRARD, professeur au lycée Ampère, G. DE LONGCHAMPS, censeur des études au lycée Charlemagne ; B. NIEWENGLOWSKI, inspecteur de l'Académie de Paris, édité par la Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois, Paris.

| | | |
|---|---|---|
| Abonnement d'un an (10 numéros) | France . . . . . . | 5 fr. » |
| | Etranger . . . . . | 6 fr. » |

**Bulletin de sciences mathématiques et physiques élémentaires**, publié par MM. L. GÉRARD, G. DE LONGCHAMPS, B. NIEWENGLOWSKI, édité par la Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois, Paris.

| | | |
|---|---|---|
| Abonnement d'un an (20 numéros) | France. . . . . . | 5 fr. » |
| | Etranger. . . . | 6 fr. » |

---

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

# COURS

DE

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,
DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES; DES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES CANDIDATS A L'AGRÉGATION;


PAR MM.

B. NIEWENGLOWSKI
Inspecteur de l'Académie de Paris, docteur ès sciences.

ET

L. GÉRARD
Professeur au lycée Ampère, docteur ès sciences.


Vol. I.

## GÉOMÉTRIE PLANE




PARIS
GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, 3

1898

# PRÉFACE

Le Cours de Géométrie élémentaire que nous publions se composera de deux volumes. Le premier, qui paraît aujourd'hui, est consacré à la *Géométrie plane*, le second étant réservé à la *Géométrie dans l'espace.*

En ce qui concerne la géométrie plane, notre but principal est de simplifier et surtout de préciser quelques-unes des théories qui font l'objet de cette partie de la géométrie élémentaire, en introduisant systématiquement la notion de *sens* dans toutes les questions où cette notion doit intervenir utilement. Ainsi, dans la plupart des questions relatives aux angles, il est indispensable de considérer le sens de la *rotation;* mais il n'est pas toujours utile de tenir compte du sens des côtés de l'angle. C'est pourquoi nous avons considéré tantôt les angles des *demi-droites*, tantôt les angles des *droites*. Nous avons généralisé l'emploi des *antiparallèles*, qui simplifie l'écriture et rend les raisonnements plus intuitifs.

Nous avons introduit la notion de *vecteurs* dès le début du troisième livre, ce qui nous a permis de simplifier des énoncés et des démonstrations.

L'ancienne définition classique de la similitude des polygones entraîne des difficultés et des complica-

tions ; nous l'avons abandonnée même pour les triangles. D'ailleurs, pour se faire une idée complète de la similitude dans le plan, il faut la considérer comme une *transformation du plan* et distinguer la similitude inverse de la similitude directe.

Nous avons fait une large place à un théorème célèbre de Stewart, à propos duquel Chasles s'exprime ainsi dans l'Aperçu historique : « On voit que cette proposition, à peu près inconnue de nos jours, mériterait de prendre place dans les éléments ou au moins dans les compléments de Géométrie. » Nous avons consacré un chapitre aux *transversales*, au *rapport anharmonique*, à la théorie des *pôles et polaires*, à *l'inversion*, etc.

Nous appelons tout particulièrement l'attention du lecteur sur la théorie des *aires :* nous avons suivi dans le texte la méthode classique, mais nous avons exposé dans une note à la fin du volume (note III) une méthode affranchie de tout postulat, où nous montrons que deux polygones quelconques sont *comparables* et que le résultat de la comparaison est indépendant du procédé suivi [1].

Pour la *mesure des grandeurs*, au lieu de renvoyer aux *traités d'Arithmétique*, où chaque auteur a sa manière de voir, nous avons cru nécessaire d'en faire l'objet d'une note, afin d'expliquer le point de vue auquel nous entendons nous placer.

---

[1] Cette théorie a été exposée pour la première fois par L. Gérard dans sa thèse sur la *Géométrie non euclidienne* (1892) ; puis dans le *Bulletin de Mathématiques spéciales* (mai 1895) ; dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (décembre 1895) et dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* (janvier 1896, juin 1897).

La composition des *transformations* et l'étude des *groupes* les plus simples font l'objet d'une autre note (note II).

D'une manière générale, nous avons conservé l'ordre traditionnel des matières et la division en livres, mais avec quelques changements. Ainsi, nous n'avons pas cru pouvoir séparer les angles des arcs de cercles, nous avons placé la théorie des parallèles avant celle des perpendiculaires, etc.

Nous avons adopté les notations *géométrographiques* de M. E. LEMOINE pour évaluer la simplicité *réelle* des constructions, qu'il ne faut pas confondre avec la simplicité *théorique*. Ainsi, pour la construction des cercles tangents à trois cercles donnés, la méthode de M. FOUCHÉ (p. 236) est la plus simple *théoriquement*, c'est-à-dire la plus facile à exposer et à comprendre, quoiqu'elle donne des tracés plus compliqués que celle que nous avons indiquée page 201.

Chaque chapitre est suivi d'exercices gradués, que nous conseillons au lecteur de résoudre dans l'ordre où ils sont disposés. Les uns ne sont que de simples applications ; les autres, plus importants, sont destinés à compléter le cours. Pour tous ceux qui offrent une difficulté sérieuse, nous avons ajouté des indications suffisantes pour que le lecteur puisse reconstituer la démonstration.

Enfin, nous avons adopté deux sortes de caractères pour le texte, les plus petits caractères étant réservés aux matières plus difficiles et qu'on peut passer à une première lecture.

---

# ERRATA

| Pages. | Lignes. | Au lieu de : | Lisez : |
|---|---|---|---|
| 36 | 8 | donneé | donnée |
| 67 | 5 en remontant | $AC<AD<AB$ | $AB<AD<AC$ |
| 97 | 2 en remontant | qui coupent | qui se coupent |
| 102 | dernière ligne | une, deux | deux, une |
| 120 | 5 | segment; AB | segment AB ; |
| 145 | 8 | sur la figure F | sur la figure F′ |
| 145 | 18 | O′M″ | O′M′ |
| 153 | 10 | A′DE″ | A′D′E′ |
| 154 | 7 en remontant | AOA | AOA′ |
| 156 | 8 | chacun | chacun à chacun |
| 169 | 7 | $1 - k^2$ | $\lvert 1 - k^2 \rvert$ |
| 173 | 2 | $AB = AC$ | $AB \neq AC$. |
| 196 | dernière ligne | AC | AC′ |
| 225 | 20 | une conique | un cercle |
| 245 | 6 | $\gamma, \gamma$ | $\gamma, \gamma'$ |
| 245 | 3 en remontant | exinscrit | exinscrits |
| 265 | 14 en remontant | $n$ | $r$ |
| 269 | 10 | $a^n$ | $a_n$ |
| 303 | dernière ligne | AH′ | A′H′ |
| 325 | 12 | $a'_u$ | $a'_n$ |
| 334 | 4 en remontant | A | A′ |
| 339 | 3 en remontant | $VV_a$ | $V_cV_a$ |

# INTRODUCTION

1. Tout corps occupe une certaine *étendue*, qu'on appelle son *volume*.

Le volume d'un corps est limité par sa *surface*.

Une portion de surface est limitée par une ou plusieurs *lignes*.

Les extrémités d'une portion de ligne sont des *points*. Un point n'a pas d'étendue.

Deux surfaces qui se rencontrent ont en commun, soit une ou plusieurs lignes, soit un ou plusieurs points isolés.

Deux lignes qui se rencontrent ont en commun un ou plusieurs points.

On peut aussi concevoir le point a priori et définir une ligne comme une suite continue de points et une surface comme une suite continue de lignes.

2. Les volumes, surfaces, lignes et points, considérés en eux-mêmes, abstraction faite des corps matériels, constituent ce qu'on appelle des *figures*.

On désigne les points d'une figure par des lettres et on nomme une figure en énonçant successivement les lettres qui désignent un certain nombre de points de cette figure, convenablement choisis.

3. La *Géométrie* est la science qui a pour objet l'étude des propriétés des figures et la mesure de leur étendue.

4. On dit que deux figures sont *égales* ou *superposables*, quand elles peuvent s'appliquer exactement l'une sur l'autre, sans se déformer.

Nous aurons toujours soin de nommer *dans le même ordre* les points des deux figures qui viennent coïncider quand on applique ces deux figures l'une sur l'autre. Ainsi, quand nous dirons que deux triangles ABC et A′B′C′ sont égaux, cela voudra dire qu'on peut les porter l'un sur l'autre de façon que le point A′ coïncide avec le point A, le point B′ avec le point B et le point C′ avec le point C.

5. La plus simple de toutes les lignes est la LIGNE DROITE ; un fil tendu nous donne l'image d'une portion de droite.

Par abréviation, on dit souvent *droite* au lieu de *ligne droite*.

La propriété caractéristique de la ligne droite est la suivante :

*Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite et on n'en peut faire passer qu'une.*

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

*Deux points déterminent une droite.*

Donc deux droites ne peuvent avoir plus d'un point commun, à moins de coïncider.

Fig. 1.

A partir d'un point A d'une droite (fig. 1), on peut se déplacer sur cette droite dans deux sens différents, dans le sens AB ou dans le sens AC. La droite est indéfinie dans les deux sens.

Le point A partage la droite en deux parties, AB et AC, qu'on appelle des *demi-droites*. Le point A est l'*origine* commune de ces demi-droites. On nomme une

demi-droite par deux lettres, la première désignant l'origine et la seconde un point quelconque de la demi-droite.

6. Une portion de droite MN, comprise entre deux points M et N (fig. 2), s'appelle un *segment*, ou une *longueur*, ou une *ligne*, ou simplement une *droite*.

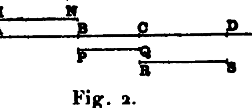


Fig. 2.

Il résulte de la propriété caractéristique de la ligne droite que, si un segment a ses deux extrémités sur une droite, tous ses points seront également sur cette droite. Cette remarque va nous permettre de comparer des segments entre eux.

Deux segments AB et MN sont *égaux* quand on peut les porter l'un sur l'autre de manière que les extrémités de l'un coïncident avec les extrémités de l'autre; car, si leurs extrémités coïncident, ils coïncident dans toute leur étendue. Nous *admettrons* que, si on a pu les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider M avec A et N avec B, on pourra également les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider M avec B et N avec A, de sorte que nous écrirons indifféremment

$$MN = AB, \quad \text{ou} \quad MN = BA.$$

(Lisez : MN *égale* AB, ou MN *égale* BA.)

Soient MN et PQ deux segments quelconques; portons-les l'un à la suite de l'autre sur une droite indéfinie, en AB et en BC; le segment *total* AC est dit la *somme* des deux segments MN et PQ, et on écrit :

$$AC = MN + PQ.$$

(Lisez : AC *égale* MN *plus* PQ.)

De même, si on porte un troisième segment RS en CD, à la suite de BC, le segment AD, formé par la réunion de AB, BC et CD, est dit la *somme* des trois segments MN, PQ, RS :

$$AD = MN + PQ + RS.$$

En continuant ainsi, on arrive à former la somme d'autant de segments qu'on voudra.

Cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on a ajouté les segments.

En effet, puisque RS = CD, nous *admettons* qu'on peut porter RS en DC de façon que R coïncide avec D et S avec C ; de même on peut porter PQ en CB. Donc :

$$RS + PQ = DB = BD = PQ + RS.$$

Ensuite, le segment AD, qui est la somme de MN, PQ et RS, peut être considéré comme la somme de MN et de PQ + RS, car PQ + RS = BD. De même, la somme de MN, RS et PQ pourrait être considérée comme la somme de MN et de RS + PQ. Or PQ + RS = RS + PQ. Donc

$$MN + PQ + RS = MN + RS + PQ.$$

On en conclut, en imitant un procédé déjà employé en arithmétique, que, dans une somme de n'importe combien de segments, on peut, sans altérer la somme, intervertir l'ordre de deux segments consécutifs quelconques et, par suite, ajouter les segments dans l'ordre qu'on voudra.

7. D'une manière générale, quand une grandeur $a$ est la somme de deux autres grandeurs $b$ et $c$, on dit que $a$ est *plus grand* que $b$, que $b$ est *plus petit* que $a$, et que $c$ est la différence entre $a$ et $b$, et on écrit :

$$a > b, \qquad b < a, \qquad c = a - b$$

(Lisez : *a plus grand que b, b plus petit que a, c égale a moins b.*)

Remarque. — Quand on ne sait pas quelle est la plus grande des deux grandeurs $a$ et $b$, on désigne indifféremment leur différence par $|a - b|$ ou par $|b - a|$.

Ceci posé, soit à comparer deux segments AB et CD (fig. 3). Portons CD sur AB de façon que C coïncide avec A et que D tombe sur la *demi-droite* AB.

Fig. 3.

1° Si D tombe en B, CD = AB ;

2° Si D tombe en E entre A et B, AB > CD et AB — CD = EB ;

3° Si D tombe en F sur le prolongement de AB, CD > AB et CD — AB = BF.

8. Soient $m$ et $n$ deux nombres entiers; si un segment $a$ est la somme de $n$ segments égaux à un autre segment $b$, on dit que $a$ contient $n$ fois $b$, que $b$ est la $n^e$ partie de $a$ et on écrit :

$$a = nb, \quad b = \frac{1}{n} a.$$

Enfin, on désigne par $\frac{m}{n} a$ la somme de $m$ segments égaux à $\frac{1}{n} a$.

En réalité, $nb$ est mis pour $b \times n$; $\frac{m}{n} a$ pour $a \times \frac{m}{n}$.

Pour plus de détails, voir la note sur la mesure des grandeurs.

9. Pour exécuter les opérations que nous venons de définir, on se sert de la *règle* et du *compas*. Nous ne nous arrêterons pas à décrire ces instruments, qui sont connus de tout le monde.

Nous dirons seulement que, pour vérifier une règle, on trace avec cette règle une ligne passant par deux points; puis on retourne la règle et on trace une seconde ligne

passant par ces deux mêmes points. Si la règle est *juste*, les deux lignes doivent coïncider.

10. On appelle ligne *brisée* ou *polygonale* une ligne composée de lignes droites de directions différentes ; par exemple : ABCDE (fig. 4).

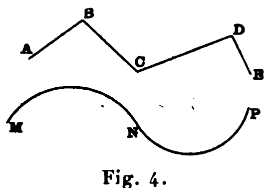


Fig. 4.

Les portions de droites qui constituent la ligne brisée s'appellent les *côtés*, et leur somme s'appelle le *périmètre* de la ligne brisée.

Toute ligne qui n'est ni droite ni brisée, s'appelle une ligne *courbe*. Telle est la ligne MNP (fig. 4).

11. La plus simple des surfaces est le plan ; la surface des eaux d'un lac tranquille offre l'image d'une portion de plan. Le plan est une surface indéfinie telle que toute droite qui passe par deux points quelconques de cette surface y soit entièrement contenue.

*Par trois points non situés en ligne droite on peut faire passer un plan et un seul.*

En effet, remarquons d'abord que, par une droite donnée, on peut faire passer une infinité de plans ; car traçons une droite sur un plan quelconque et transportons le plan et la droite jusqu'à ce que cette dernière coïncide avec la droite donnée ; on aura ainsi un plan passant par la droite donnée et il est évident qu'on peut le faire tourner autour de cette droite, sans qu'il cesse de la contenir.

Ceci posé, soient A, B, C trois points quelconques non en ligne droite (fig. 5). Par la droite AB, faisons passer un plan et faisons-le tourner autour de cette droite ; il arrivera un moment où ce plan contiendra le point C, et, par suite, on peut faire passer un plan par les trois points

A, B, C. Reste à prouver qu'on n'en peut faire passer qu'un. En effet, soient P et Q deux plans passant par les trois points donnés. Les deux droites AB et AC sont tout entières dans chacun de ces deux plans, puisqu'elles ont chacune deux points dans chacun d'eux. Soit M un point du plan Q ; joignons-le à un point D de la droite AB choisi de telle sorte que les points D et M soient de part et d'autre de la droite AC. La droite DM a deux points, D et M, dans le plan Q ; donc elle y est contenue tout entière ; d'ailleurs elle coupe évidemment la droite AC, qui est aussi dans ce plan, en un point E. Or les points D et E appartiennent aussi au plan P ; par suite, la droite DEM est tout entière dans ce plan ; le point M, qui est sur cette droite, appartient donc au plan P. Ainsi, tout point de l'un des deux plans P et Q est dans l'autre ; par conséquent, les deux plans coïncident.

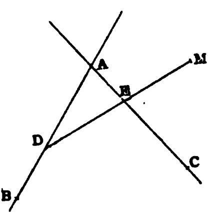


Fig. 5.

12. Si on fait tourner un plan autour d'une droite de ce plan jusqu'à ce que l'un des points du plan prenne la place primitivement occupée par un autre point du plan, le plan revient coïncider avec sa position primitive.

13. On appelle figure *plane* une figure dont toutes les parties sont dans un même plan.

Si on transporte une figure plane de façon que trois de ses points non en ligne droite viennent se placer dans un plan, la figure tombe tout entière dans ce plan.

## CERCLE

14. La plus simple des courbes planes est la *circonférence de cercle.* On appelle ainsi la courbe (fig. 6) que

décrit l'extrémité M d'un segment OM, de longueur invariable, dont l'autre extrémité O reste fixe, pendant que le segment prend toutes les positions possibles autour du point O, en restant toujours dans un même plan.

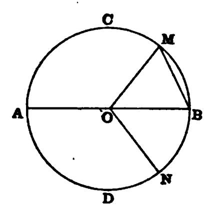


Fig. 6.

La portion de plan enfermée par cette courbe s'appelle *cercle*. Mais, pour abréger, nous emploierons le mot *cercle*, au lieu de *circonférence de cercle*, pour désigner la courbe elle-même.

Le point O est le *centre ;* les portions de droites qui joignent le centre aux points de la circonférence sont les *rayons*. Tous les rayons d'un cercle sont égaux, d'après la définition de la circonférence.

On appelle *corde*, une portion de droite qui joint deux points de la circonférence ; *diamètre*, une corde qui passe par le centre. Tous les diamètres d'un cercle sont égaux comme étant chacun la somme de deux rayons.

On appelle *arc*, une portion de la circonférence telle que ACM, ou ADBM.

Deux circonférences de même rayon sont égales ; car si on fait coïncider leurs plans et leurs centres, ces deux courbes s'appliqueront exactement l'une sur l'autre.

On peut répéter pour des arcs d'une même circonférence ou de deux circonférences égales tout ce qui a été dit pour les segments dans les paragraphes 6-7-8.

15. *Tout diamètre AB partage le cercle et la circonférence en deux parties égales.*

Il s'agit de prouver que l'arc ACB (fig. 6) est égal à l'arc ADB. En effet, soit M un point de l'arc ACB ; plions la figure autour de AB jusqu'à ce que le demi-

plan ACB vienne s'appliquer sur le demi-plan ADB. Le rayon OM prendra une certaine position ON telle que ON = OM ; donc le point N appartient à l'arc inférieur ADB. Ainsi, tous les points de l'arc ACB viendront se placer sur l'arc ADB ; donc ces deux arcs sont égaux. Chacun d'eux vaut donc une demi-circonférence.

De même, la portion de plan comprise entre le diamètre AB et l'un ou l'autre des arcs ACB ou ADB est un demi-cercle.

16. Si l'on considère les deux arcs *sous-tendus* par une corde BM qui ne passe pas par le centre, l'un d'eux, BM, est moindre qu'une demi-circonférence ; l'autre, BDAM, est plus grand qu'une demi-circonférence.

## SIGNIFICATION DES PRINCIPAUX TERMES EMPLOYÉS EN GÉOMÉTRIE

17. **Axiome** : proposition évidente par elle-même.

Ex. : *Deux figures égales à une troisième sont égales entre elles.*

**Théorème** : proposition que l'on rend évidente par un raisonnement appelé *démonstration*.

Ex. : *Tout diamètre partage une circonférence en deux parties égales.*

**Postulatum** (ou **postulat**) ou **demande** : proposition que l'on demande d'admettre sans démonstration, par exemple, le *postulatum d'Euclide* [41].

**Corollaire** : conséquence immédiate d'un ou plusieurs théorèmes [16].

**Lemme** : théorème préliminaire destiné à faciliter la démonstration d'un théorème plus important.

Problème : question à résoudre.

18. En général, l'énoncé d'un théorème se compose de deux parties : l'*hypothèse* ou la supposition qu'on fait, et la *conclusion* qu'on veut démontrer. Ainsi le théorème du nº 15 peut s'énoncer de la façon suivante :

*Si une corde passe par le centre, elle divise la circonférence en deux parties égales.*

L'hypothèse, c'est que la corde considérée passe par le centre ; et la conclusion, c'est qu'elle divise la circonférence en deux parties égales.

Etant donnée une proposition vraie ou fausse, si on prend la conclusion pour hypothèse et l'hypothèse pour conclusion, on obtient une nouvelle proposition qui est dite *réciproque* de la proposition primitive.

Par opposition à la réciproque, la proposition primitive s'appelle *directe.*

Ensuite, si on prend pour hypothèse la négation de l'hypothèse de la proposition directe et pour conclusion la négation de la conclusion de la proposition directe, on obtient une troisième proposition qui s'appelle la proposition *contraire* de la proposition directe.

Enfin, on peut encore considérer la *réciproque de la contraire* ou, ce qui revient au même, la *contraire de la réciproque.*

On a ainsi quatre propositions :

| | |
|---|---|
| la directe, | la contraire, |
| la réciproque, | la contraire de la réciproque. |

Il est essentiel de remarquer que la réciproque et la contraire sont toujours vraies ou fausses en même temps et qu'il en est de même de la directe et de la contraire de la réciproque.

Exemple :

PROPOSITION DIRECTE. Si une corde passe par le centre, elle divise la circonférence en deux parties égales.

RÉCIPROQUE. Si une corde divise la circonférence en deux parties égales, elle passe par le centre.

CONTRAIRE. Si une corde ne passe pas par le centre, elle divise la circonférence en deux parties inégales.

CONTRAIRE DE LA RÉCIPROQUE. Si une corde divise la circonférence en deux parties inégales, elle ne passe pas par le centre.

On vérifie sans peine que la première et la dernière de ces quatre popositions se déduisent l'une de l'autre et qu'il en est de même de la seconde et de la troisième. Par exemple, si on a démontré que toutes les cordes qui passent par le centre divisent la circonférence en deux parties égales, il en résulte immédiatement qu'une corde qui divise la circonférence en deux parties inégales ne peut passer par le centre; car, si elle passait par le centre, elle diviserait la circonférence en deux parties égales.

19. PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ. — Lorsque, dans une question, on a établi une série de théorèmes dont les hypothèses H, H′, H″ embrassent tous les cas possibles et dont les conclusions correspondantes C, C′, C″ sont incompatibles les unes avec les autres, toutes les réciproques sont vraies; c'est-à-dire que C entraîne H, que C′ entraîne H′, et que C″ entraîne H″ ([1]).

En effet, C ne peut exister ni avec H′, car H′ entraîne C′ qui est incompatible avec C ; ni avec H″, car H″ entraîne

[1]) F.-C. HAUBER, *Scholæ logico-mathematicæ*, 1825, § 291.

$C''$ qui est incompatible avec C; mais il n'y a pas d'autres hypothèses possibles que H, H', H''; donc, puisque C est incompatible avec H' et avec H'', il faut qu'elle entraîne H.

Ainsi, soit M un point situé dans le plan d'un cercle de centre O, et de rayon $r$. Ce point M peut être *intérieur* au cercle, ou *extérieur*, ou *situé sur la circonférence*.

S'il est intérieur, $OM < r$.

S'il est extérieur, $OM > r$.

S'il est sur la circonférence, $OM = r$.

Nous avons fait toutes les hypothèses possibles et nous sommes arrivés à trois conclusions incompatibles les unes avec les autres. Donc les trois réciproques sont vraies :

Si $OM < r$, le point M est intérieur.

Si $OM > r$, le point M est extérieur.

Si $OM = r$, le point M est sur la circonférence.

Démontrons, par exemple, que, si $OM < r$, le point M est intérieur. En effet, s'il était extérieur, OM serait plus grand que $r$, ce qui est contraire à l'hypothèse, et s'il était sur la circonférence, OM serait égal à $r$, ce qui est encore contre l'hypothèse.

20. On dit que la démonstration d'un théorème est *indirecte* lorsque, au lieu de montrer comment la conclusion se déduit de l'hypothèse, on fait voir que, si cette conclusion n'était pas vraie, on serait conduit à des conséquences incompatibles avec l'hypothèse. C'est ainsi que nous avons démontré, dans le n° 18, qu'une corde qui divise la circonférence en deux parties inégales ne passe pas par le centre.

# PREMIÈRE PARTIE

# GÉOMÉTRIE PLANE

## PREMIER LIVRE

### CHAPITRE PREMIER

### DES ANGLES

21. On appelle *angle* la figure formée par deux demi-droites OA, OB (fig. 7) partant d'un même point O. L'origine commune de ces deux demi-droites se nomme le *sommet* de l'angle, les deux demi-droites qui le forment en sont les *côtés*. Les deux demi-droites OA, OB partagent le plan en deux régions, que nous avons distinguées l'une de l'autre sur la figure, en couvrant l'une de ces régions de hachures.

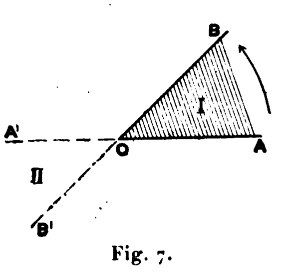


Fig. 7.

Si la demi-droite OA tourne autour du point O, sans quitter le plan, dans un sens convenable, indiqué par une flèche sur la figure, elle aura balayé, dans ses positions successives, la région (I) tout entière quand elle sera venue coïncider avec OB ; elle aura ainsi décrit l'angle défini par ces deux demi-droites. Mais, si l'on fait tourner OA en sens con-

traire, elle aura balayé entièrement la région (II) quand elle sera venue coïncider avec OB. On dit encore que OA a décrit un angle; mais, pour éviter toute confusion, nous appellerons le premier angle un *angle saillant*, et le second un *angle rentrant*. Ainsi, en reprenant la définition donnée plus haut, nous dirons que deux demi-droites OA, OB partagent le plan en deux régions ; à celle de ces deux régions qui contient les prolongements des deux demi-droites, c'est-à-dire à celle qui contient les demi-droites opposées OA′, OB′, correspond l'angle rentrant, et à l'autre l'angle saillant, défini par ces deux demi-droites.

On désigne un angle de plusieurs manières :

1° Par une seule lettre, celle du sommet ;

2° Par trois lettres placées, la première sur l'un des côtés, la seconde au sommet, et la troisième sur l'autre côté ;

3° Par une lettre minuscule placée à côté de l'arc de cercle parcouru par un point de l'un des côtés, quand on fait tourner ce côté autour du sommet de manière à lui faire décrire l'angle en question.

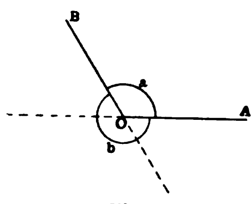


Fig. 8.

Pour éviter toute ambiguïté, nous n'emploierons les deux premières notations que pour désigner des angles *saillants*. Ainsi quand nous parlerons de l'angle O, ou de l'angle AOB, il s'agira toujours de l'angle *saillant* formé par les demi-droites OA et OB.

Au contraire, la troisième notation s'applique à toute espèce d'angles; ainsi on peut désigner l'angle saillant de la figure 8 par $a$ et l'angle rentrant par $b$.

22. Deux angles *saillants* AOB, A′O′B′ (fig. 9) sont *égaux* quand on peut les porter l'un sur l'autre de façon que les côtés de l'un coïncident avec les côtés de l'autre.

Nous admettrons que, si on a pu les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider O′A′ avec OA et O′B′ avec OB, on pourra également les appliquer l'un sur l'autre en faisant coïncider O′B′ avec OA et O′A′ avec OB.

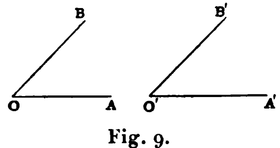


Fig. 9.

Il en est de même de deux angles *rentrants*. Mais un angle rentrant ne peut pas être égal à un angle saillant.

23. On obtient tous les angles possibles en faisant tourner une demi-droite OA autour de son origine O (fig. 10).

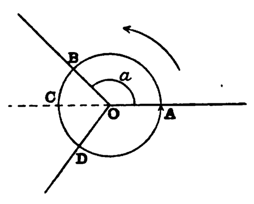


Fig. 10.

Pour suivre plus facilement le mouvement de cette demi-droite, considérons la circonférence décrite par l'un de ses points, A, par exemple.

Quand le point A parcourt un arc de cercle AB moindre qu'une demi-circonférence, la demi-droite OA décrit un angle saillant.

Quand le point A aura parcouru une demi-circonférence ABC, la demi-droite OA viendra coïncider avec le prolongement OC de sa direction primitive : nous dirons qu'elle *a décrit un angle* que nous appellerons provisoirement un angle *plat*.

Quand le point A aura parcouru un arc ABD plus grand qu'une demi-circonférence, la demi-droite OA aura décrit un angle rentrant.

Enfin, quand le point A aura parcouru toute la circon-

férence, la demi-droite OA sera revenue à sa position primitive après avoir fait un tour complet : nous dirons qu'elle *a décrit un angle* que nous appellerons provisoirement un angle *plein*.

Mais rien n'empêche de continuer la rotation. Supposons, par exemple, que la demi-droite OA, en tournant toujours dans le même sens, fasse deux tours complets et décrive ensuite un angle $a$ saillant, plat ou rentrant : nous dirons qu'elle a décrit en tout un angle qui se compose de deux angles pleins et de l'angle $a$.

24. Tous les angles plats sont égaux, ainsi que les angles pleins. Soient $a$ et $a'$ deux angles qui se composent, l'un de $n$ angles pleins et d'un angle $b$ saillant, plat ou rentrant, l'autre de $n'$ angles pleins et d'un angle $b'$ saillant, plat ou rentrant ($n$ et $n'$ désignant des nombres entiers) ; on dit que ces deux angles $a$ et $a'$ sont égaux si $n = n'$ et $b = b'$.

25. On appelle *somme* de deux angles $a$ et $b$ (fig. 11) l'angle $c$ engendré par une demi-droite qui décrit successivement et en tournant toujours dans le même sens deux angles égaux à $a$ et à $b$. L'angle $b$ s'appelle la *différence* entre $a$ et $c$, et on écrit

$$a + b = c,$$
$$b = c - a,$$
$$c > a, \quad a < c.$$

Fig. 11.

On définit de la même manière la somme d'un nombre quelconque d'angles et on peut répéter pour les angles tout ce qui a été dit sur les segments [6-7-8].

**Remarque.** — Les angles que nous considérerons désormais seront toujours supposés *saillants*, à moins que le contraire ne soit spécifié ou indiqué par le contexte.

### ANGLES AU CENTRE

26. Dans une circonférence, on appelle *angle au centre* un angle formé par deux rayons : par exemple (fig. 12), l'angle AOB.

***Théorème.*** — *Dans une même circonférence, ou dans des circonférences égales, deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux, et réciproquement.*

En effet, soient (fig. 12) AOB, A′O′B′ deux angles au centre égaux, dans deux circonférences égales. Si nous faisons coïncider les angles, les circonférences coïncideront, l'arc A′B′ s'appliquera exactement sur l'arc AB; donc ces arcs sont égaux.

Fig. 12.

Réciproquement, *dans deux circonférences égales, deux angles au centre sont égaux quand ils interceptent des arcs égaux;* car, si nous portons les deux circonférences l'une sur l'autre de manière que les arcs égaux AB, A′B′ coïncident, les angles AOB, A′O′B′ coïncideront aussi ; donc ils sont égaux.

### ROTATION

27. Quand une figure plane de forme invariable se déplace dans son plan et que l'un de ses points reste fixe, on dit qu'elle *tourne* autour de ce point fixe et le mouvement de la figure s'appelle une *rotation*.

Soit O le point fixe (fig. 13) ; tous les autres points de

la figure décrivent, dans le même sens, des arcs de cercle ayant O pour centre ; de plus, les droites qui les joignent au point O décrivent des angles égaux. En effet, soient A et B deux points de la figure, que la rotation amène en A′ et B′, et soit C le point de rencontre de OA avec la circonférence décrite de O comme centre avec OB pour rayon. Si nous supposons que la rotation s'effectue dans le sens CB, le point B décrira un arc BB′, qui sera la continuation de l'arc CB, et le point C viendra se placer en un point C′ de l'arc CBB′ tel que l'arc C′B′ soit égal à l'arc CB, puisque la figure ne se déforme pas. Donc, si de l'arc total CBB′ on retranche successivement les arcs CB et C′B′, les arcs restants BB′ et CC′ seront égaux; par conséquent [26], l'angle BOB′, dont a tourné le point B, est égal à l'angle COC′ ou AOA′, dont a tourné le point A.

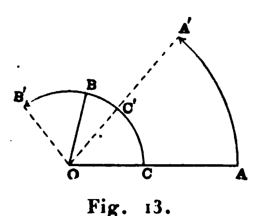


Fig. 13.

### GRADUATION DE LA CIRCONFÉRENCE

28. Considérons deux circonférences *concentriques*, c'est-à-dire ayant le même centre O (fig. 14). Si nous supposons que la circonférence OA soit partagée, par exemple, en six parties égales par les rayons OA, OB, OC,..., l'autre circonférence OA′ sera partagée en un même nombre de parties égales par les mêmes rayons. En effet, les angles au centre AOB, BOC..., sont égaux comme interceptant des arcs égaux sur la circonférence OA [26] ; donc ces angles interceptent

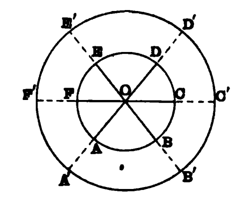


Fig. 14.

aussi des arcs égaux sur la circonférence OA′. Par conséquent $\widehat{A'B'} = \widehat{B'C'} = \ldots$

29. **Corollaires.** — I. — *Si un angle de sommet* O *intercepte un arc égal à* m *fois la* nᵉ *partie de la circonférence* OA, *il interceptera également sur la circonférence* OA′ *un arc égal à* m *fois la* nᵉ *partie de cette circonférence.*

Ainsi l'angle AOC intercepte deux arcs, AC et A′C′, qui sont respectivement les $\frac{2}{6}$ ou plus simplement le $\frac{1}{3}$ des circonférences OA et OA′.

30. II. — *Si deux angles* AOB *et* A′O′B′ (fig. 15) *interceptent sur deux circonférences décrites de leurs sommets comme centres des arcs* AB, A′B′ *respectivement égaux à* m *fois la* nᵉ *partie de ces deux circonférences, ces deux angles sont égaux.* En effet, décrivons de O comme centre avec O′A′ pour rayon une circonférence qui rencontre OA en C et OB en D.

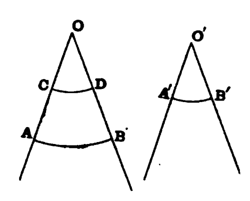


Fig. 15.

D'après le corollaire I, l'arc CD est égal à $m$ fois la $n^e$ partie de la circonférence OC, et par conséquent égal à l'arc A′B′. Donc les angles COD et A′O′B′ sont égaux, comme interceptant des arcs égaux dans des circonférences égales.

31. On divise ordinairement, par la pensée, une circonférence en 360 parties égales, qu'on appelle des *degrés*, chaque degré en 60 *minutes* et chaque minute en 60 *secondes*.

Pour abréger, on se sert des caractères $^{\circ}\,'\,''$, qui signifient *degrés, minutes, secondes*. Ainsi, on écrit $34^{\circ}\,25'\,18''$ au lieu de 34 degrés 25 minutes 18 secondes.

Il résulte de ce que nous avons dit [29] que, si du

sommet O d'un angle donné (fig. 15), avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence, l'arc AB compris entre les côtés de l'angle aura toujours le même nombre de degrés, minutes et secondes, quel que soit le rayon OA.

Si l'arc AB se compose, par exemple, de 34°25′18″, nous dirons que l'angle AOB est *un angle de* 34°25′18″.

Deux angles du même nombre de degrés sont égaux [30].

En particulier, deux angles d'un degré sont égaux et s'appellent des *degrés*. Il en est de même des angles d'une minute et des angles d'une seconde.

Un angle de 34°25′18″ doit être considéré comme la somme de 34 angles d'un degré, de 25 angles d'une minute et de 18 angles d'une seconde ; c'est en ce sens qu'on dit qu'il *vaut* 34°25′18″.

Un angle plat est un angle de 180°. Un angle plein est un angle de 360°.

Pour trouver le nombre de degrés contenus dans un angle, on se sert du *rapporteur* (fig. 16). On appelle ainsi un demi-cercle ordinairement en corne transparente ou en cuivre, dont la circonférence est divisée en 180 degrés.

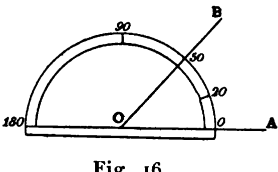


Fig. 16.

Pour mesurer un angle AOB, on place le centre du rapporteur au sommet de l'angle, le diamètre sur le côté OA, et on lit le numéro de la division du rapporteur qui correspond au côté OB. Par exemple, si le côté OB passe par la division 50, c'est que l'angle AOB est de 50°.

Inversement, si on veut mener par le point O une droite faisant avec OA un angle de 50°, on place le rapporteur comme ci-dessus et on mène la droite OB qui passe par la division 50.

32. On appelle *quadrant* un quart de circonférence ou un arc de 90°.

On appelle *angle droit* un angle de 90°, c'est-à-dire un angle qui intercepte sur une circonférence quelconque ayant son sommet pour centre un arc égal au quart de cette circonférence.

Tous les angles droits sont égaux [30].

On dit que deux droites AB et CD (fig. 17) qui se coupent sont *perpendiculaires* quand l'un des quatre angles formé par ces deux droites est droit. Dans ce cas, ces angles sont droits tous les quatre. En effet, supposons, par exemple, que l'angle AOC soit droit; décrivons, de O comme centre, une circonférence qui rencontre les quatre demi-droites en A, B, C, D. Comme ACB est une demi-circonférence et que l'arc AC est, par hypothèse, un quadrant, il en résulte que l'arc CB est aussi un quadrant; il en est de même des deux autres arcs BD et AD. Donc les quatre angles AOC, COB, BOD, DOA sont droits.

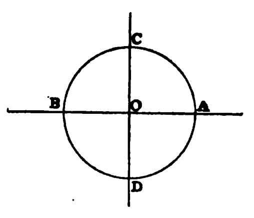


Fig. 17.

On dit que deux angles sont *supplémentaires* quand leur somme est égale à 180° ou à deux angles droits.

On appelle *complémentaires* deux angles dont la somme est égale à 90° ou à un angle droit.

On appelle angle *obtus* un angle plus grand qu'un angle droit, et angle *aigu* un angle plus petit qu'un angle droit.

### ANGLES FORMÉS AUTOUR D'UN POINT

33. On dit que deux angles sont *adjacents* quand ils ont même sommet, un côté commun et qu'ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

**Théorème.** — ***Si les côtés non communs de deux angles adjacents,*** AOB *et* BOC (fig. 18), ***sont en ligne droite, ces angles sont supplémentaires, et réciproquement.***

Fig. 18.

En effet, décrivons de O comme centre avec un rayon quelconque une circonférence, qui rencontre les trois côtés en A, B, C. Comme la somme des arcs AB et BC est une demi-circonférence, la somme des angles AOB et BOC vaut 180°.

*Réciproquement*, si les angles AOB et BOC valent ensemble 180°, la somme des arcs AB et BC est une demi-circonférence; donc les deux rayons OA et OC forment un diamètre.

34. Plus généralement, *la somme des angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE *formés autour d'un point* O *d'un même côté d'une droite* AE (fig. 19) *est égale à deux angles droits*. Car, si l'on décrit une circonférence de centre O, qui rencontre les côtés en A, B, C, D, E, la somme des arcs AB, BC, CD, DE étant une demi-circonférence, la somme des angles AOB, BOC, COD, DOE vaut 180°.

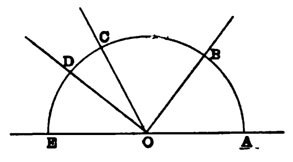


Fig. 19.

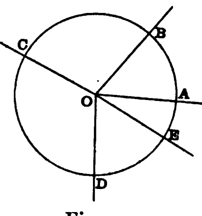


Fig. 20.

De même, *la somme des angles consécutifs* AOB, BOC, COD, DOE, EOA (fig. 20) *formés tout autour du point* O *est égale à quatre angles droits*. Car la somme des arcs AB, BC, CD, DE, EA est égale à 360°.

Les réciproques de ces deux théorèmes se démontrent sans difficulté.

35. On dit que deux angles, tels que AOD et BOC (fig. 21), sont *opposés par le sommet* quand ils ont même sommet et que les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

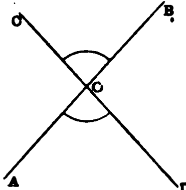


Fig. 21.

***Théorème.*** — *Deux angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet, les angles AOD et BOC ont tous deux pour supplément l'angle AOC; donc ils sont égaux.

***Réciproquement,*** *si deux angles égaux* AOD *et* BOC *ont les côtés* OA *et* OB *dans le prolongement l'un de l'autre et si les deux autres côtés* OC *et* OD *sont de part et d'autre de la droite* AB, *ces deux derniers côtés sont aussi en ligne droite.*

Car l'angle BOD a pour supplément AOD ou son égal BOC; donc les côtés OC et OD sont en ligne droite [33].

Remarque. — On peut démontrer directement l'égalité de deux angles opposés par le sommet, AOD et BOC, en *retournant* l'angle AOC. En effet, retournons la figure de façon que OA prenne la place de OC, et réciproquement ; alors le prolongement de OC vient s'appliquer sur le prolongement de OA, c'est à dire que OD prend la place de OB ; donc l'angle AOD vient s'appliquer sur l'angle COB.

Cette démonstration a l'avantage de ne pas s'appuyer sur la notion de plan.

## BISSECTRICE

36. On appelle *bissectrice* d'un angle AOB (fig. 22) la droite qui partage cet angle en deux parties égales.

Fig. 22.

Soit AB un arc de cercle compris entre les deux côtés de cet angle et décrit de son sommet comme centre ; et soit C le milieu de l'arc AB. Les angles AOC, COB sont égaux ; donc OC est la bissectrice de l'angle AOB.

37. **Théorème.** — *Les bissectrices* OD, OE (fig. 23) *de deux angles adjacents supplémentaires* AOC, COB *forment un angle droit.*

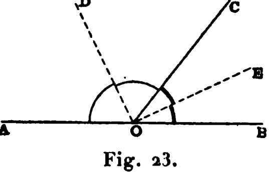


Fig. 23.

En effet, les deux angles DOC, COE sont respectivement les moitiés des angles AOC, COB, dont la somme vaut deux droits ; donc l'angle DOE est droit.

38. **Théorème.** — *Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites* AC, BD (fig. 24) *qui se coupent forment deux droites perpendiculaires.*

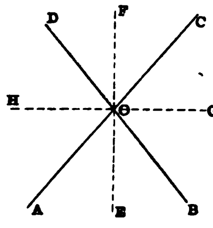


Fig. 24.

Remarquons d'abord que les bissectrices OE, OF des deux angles AOB, COD opposés par le sommet sont en ligne droite ; car les angles AOE et COF étant égaux comme moitiés d'angles égaux et ayant les côtés OA et OC dans le prolongement l'un de l'autre, les deux autres

côtés, OE et OF, qui sont de part et d'autre de AC, sont aussi dans le prolongement l'un de l'autre. Il en est de même des bissectrices OG et OH. Enfin l'angle EOG est droit [37]; donc les quatre bissectrices OE, OF, OG, OH forment deux droites rectangulaires EF et GH.

### EXERCICES

1. Soient A, B, C trois points en ligne droite et M le milieu de AB. Démontrer que le segment CM est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des segments CA et CB selon que le point C est situé sur le prolongement de AB ou compris entre les deux points A et B.

La même propriété a lieu pour des arcs de cercle.

2. Soient OA, OB, OC trois demi-droites issues d'un même point et OM la bissectrice de l'angle AOB. Démontrer que l'angle COM est égal à la demi-somme ou à la demi-différence des angles COA et COB selon que OC est en dehors de l'angle AOB ou à l'intérieur de cet angle.

3. Si quatre demi-droites issues d'un même point forment quatre angles consécutifs tels que le premier soit égal au troisième et le second au quatrième, elles sont deux à deux dans le prolongement l'une de l'autre.

4. Si un rayon de lumière est réfléchi par un miroir susceptible de tourner autour du point d'incidence, quand le miroir aura tourné d'un certain angle, le rayon réfléchi aura tourné d'un angle double. (Le rayon incident et le rayon réfléchi sont également inclinés sur le miroir, qu'on supposera réduit à une ligne droite située dans le plan des rayons.)

---

## CHAPITRE II

## THÉORIE DES PARALLÈLES

39. On dit que deux droites situées dans un même plan sont *parallèles* lorsqu'elles ne se rencontrent point, quelque loin qu'on les prolonge.

Par opposition, deux droites qui se rencontrent sont dites *concourantes*.

Deux droites AB, CD (fig. 25) coupées par une troisième EF forment huit angles, quatre *internes :* AGH, BGH, CHG, DHG, et quatre *externes :* AGE, BGE, CHF, DHF. Ces huit angles, considérés deux à deux, ont reçu des noms particuliers.

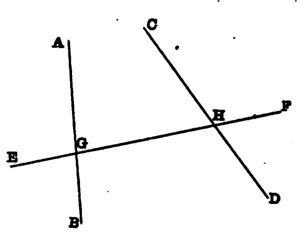


Fig. 25.

On appelle *alternes internes* deux angles internes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante EF : par exemple, AGH et DHG.

On appelle *alternes externes* deux angles externes, non adjacents et situés de part et d'autre de la sécante : par exemple, AGE et DHF.

On appelle *correspondants* deux angles non adjacents, l'un interne, l'autre externe, et situés tous deux du même côté de la sécante : par exemple, AGE et CHG.

On appelle *intérieurs* deux angles internes situés du même côté de la sécante : par exemple, AGH et CHG.

Il y a deux couples d'angles alternes internes : AGH et DHG, BGH et CHG;

Deux couples d'angles alternes externes : AGE et DHF, BGE et CHF;

Quatre couples d'angles correspondants : AGE et CHG, AGH et CHF, BGE et DHG, BGH et DHF;

Deux couples d'angles intérieurs : AGH et CHG, BGH et DHG.

Si deux angles alternes internes sont égaux, les deux autres le seront aussi ; il en sera de même des angles alternes externes et des angles correspondants, et les

angles intérieurs seront supplémentaires. Réciproquement, si deux angles intérieurs sont supplémentaires, tous les couples d'angles alternes internes, alternes externes, correspondants seront égaux.

40. ***Théorème.*** — *Deux droites* AB *et* CD (fig. 26) *qui font avec une sécante* GH *des angles alternes internes égaux sont parallèles.*

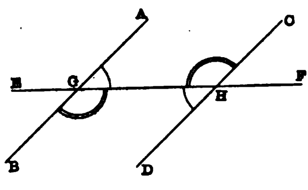


Fig. 26.

En effet, supposons que les angles AGH et DHG soient égaux ; leurs suppléments, BGH et CHG, le seront aussi. Donc les deux figures, AGHC et DHGB, sont superposables; car on peut les faire coïncider en portant la première sur la seconde de manière que le point G vienne en H et le point H en G. On en conclut que, si les demi-droites GA et HC se rencontraient, les demi-droites HD et GB se rencontreraient aussi; mais alors les deux droites AB et CD auraient deux points communs, ce qui est impossible. Par conséquent, ces deux droites sont parallèles.

Corollaires. — I. — *Deux droites sont parallèles quand elles font avec une sécante deux angles intérieurs supplémentaires, ou deux angles correspondants égaux.*

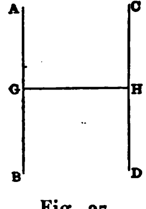


Fig. 27.

II. — *Deux droites* AB *et* CD (fig. 27) *perpendiculaires à une troisième* GH *sont parallèles, car les angles alternes internes sont égaux, comme droits.* D'ailleurs, on peut s'en rendre compte directement en pliant la figure autour de GH : les demi-droites GA et HC

viennent s'appliquer sur GB et sur HD. Donc, si les droites AB et CD se rencontraient en un point situé d'un côté de GH, elles se rencontreraient aussi en un autre point situé de l'autre côté de GH ; ce qui est impossible. Donc elles sont parallèles.

41. Postulatum d'Euclide (¹). — Nous *demandons* d'admettre que, *si deux droites* AB *et* CD (fig. 28) *coupées par une sécante* GH *font avec elle des angles intérieurs non supplémentaires, elles se rencontrent du côté où la somme des angles intérieurs est moindre que deux droits.*

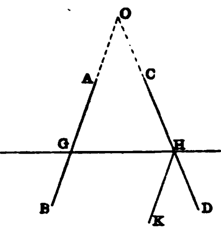


Fig. 28.

La somme des quatre angles internes AGH, CHG, BGH, DHG est égale à quatre angles droits ; par conséquent, si la somme des deux angles intérieurs AGH, CHG n'est pas égale à deux droits, la somme des deux autres angles intérieurs BGH, DHG ne le sera pas non plus; l'une de ces deux sommes sera plus petite que deux droits et l'autre plus grande. Supposons, par exemple, $\widehat{BGH} + \widehat{DHG} > 2$ droits ; nous pourrons mener dans l'angle GHD une droite HK faisant avec GH un angle supplémentaire de BGH; cette droite HK sera parallèle à GB [40, I] et les deux demi-droites GB, HD, étant situées de part et d'autre de HK, ne pourront pas se rencontrer. Le postulat d'Euclide consiste à admettre que les deux autres demi-droites GA et HC se rencontrent nécessairement, c'est-à-dire que les deux droites AB et CD se rencontrent du côté de A et de C,

(¹) Euclide, célèbre géomètre grec, 285 avant J.-C.

où la somme des angles intérieurs AGH, CHG est moindre que deux droits.

La géométrie que nous exposons dans le présent ouvrage s'appelle la géométrie *euclidienne*, parce qu'elle repose tout entière sur le postulat d'Euclide.

En prenant pour point de départ la négation du postulat d'Euclide, on obtiendrait un second système de géométrie, qui a été découvert par Lobatschewski et Bolyai (¹) et qu'on appelle la géométrie *non euclidienne* (²). Dans ce système, la somme des angles d'un triangle est moindre que deux angles droits, il n'y a pas de figures semblables, etc.

42. **Théorème.** — *Par un point* H *pris hors d'une droite* AB (fig. 28), *on peut mener une parallèle à cette droite et on n'en peut mener qu'une.*

En effet, joignons le point H à un point quelconque G de la droite AB et faisons du côté de B un angle GHK supplémentaire de BGH : la droite HK ainsi obtenue sera parallèle à AB [40,I]. D'ailleurs, toute autre droite CD passant par H fera avec GH un angle GHD non supplémentaire de BGH, et, par conséquent, rencontrera la droite AB [41].

Remarque. — Le postulat d'Euclide s'énonce souvent ainsi :

*Par un point, on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.*

Cette proposition est équivalente à celle du numéro 41. En effet, nous venons de voir qu'elle s'en déduit; et réciproquement, si l'on admet que par un point on ne puisse

(¹) Lobatschewski, géomètre russe, et Bolyai, officier hongrois, ont publié leur découverte, presque en même temps, vers 1830.

(²) Voir *Géométrie non euclidienne* de L. Gérard, Hermann, Paris.

mener qu'une parallèle à une droite, il en résulte que, si deux droites AB et CD coupées par une sécante GH font avec elle deux angles intérieurs non supplémentaires, elles se rencontrent nécessairement; car autrement, en faisant du côté de B un angle GHK supplémentaire de BGH, on aurait deux droites, HK et HD, passant par le point H et parallèles à AB. De plus, nous avons démontré [41] qu'elles ne peuvent pas se rencontrer du côté où la somme des angles intérieurs est plus grande que deux droits ; donc elles se rencontrent du côté où la somme des angles intérieurs est moindre que deux droits.

Corollaires. — I. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles l'une à l'autre;* car, si elles avaient un point commun, on pourrait mener par ce point deux parallèles à la troisième droite.

II. — *Quand deux droites* AB *et* HK *sont parallèles* (fig. 28), *toute droite qui rencontre l'une rencontre l'autre.* En effet, supposons que CD rencontre HK en un point H; comme, par ce point H, on ne peut pas mener à AB d'autre parallèle que HK, il faut bien que CD rencontre AB.

43. ***Théorème.*** — *Les angles intérieurs formés par deux parallèles coupées par une sécante sont supplémentaires;* car, s'ils ne l'étaient pas, les deux droites ne seraient pas parallèles [41]. Par conséquent, *les angles alternes internes formés par deux parallèles coupées par une sécante sont égaux, ainsi que les angles alternes externes et les angles correspondants.*

Corollaires. — I. — *Quand deux droites* AB *et* CD (fig. 29) *sont parallèles, toute droite* EF *perpendiculaire*

*à l'une est perpendiculaire à l'autre.* En effet, supposons que EF soit perpendiculaire à AB en un point F. D'abord EF rencontre CD [42, corollaire II] en un point G ; ensuite les angles alternes internes F et G sont égaux ; comme le premier est droit, le second l'est aussi.

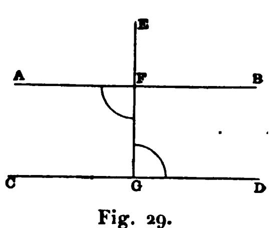


Fig. 29.

II. — *Deux droites* A *et* B *respectivement perpendiculaires à deux droites parallèles* A′ *et* B′ *sont parallèles ;* car A, qui est perpendiculaire à A′, est aussi [43,I] perpendiculaire à B′, et, par suite [40,II], les droites A et B étant toutes deux perpendiculaires à B′ sont parallèles.

III. — *Deux droites* A *et* B *respectivement perpendiculaires à deux droites concourantes* A′ *et* B′ *sont concourantes ;* car, si elles étaient parallèles, A′ et B′ le seraient aussi [II].

44. **Théorème.** — *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

En effet, considérons d'abord les deux angles ABC, DEF (fig. 30) dont les côtés BA et ED sont parallèles et de même sens, ainsi que les côtés BC et EF. Soit G le point de rencontre des droites AB et EF. Les angles ABC, AGF sont égaux comme correspondants par rapport aux deux parallèles BC et EF coupées par la sécante AB. Pareillement, les angles AGF et DEF sont égaux. Donc les angles ABC, DEF le sont aussi.

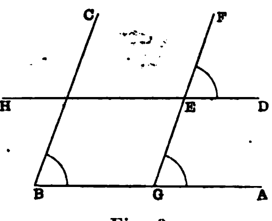


Fig. 30.

Considérons maintenant deux angles ABC, GEH dont

les côtés sont respectivement parallèles et de *sens contraires*. Les angles GEH et DEF sont égaux, comme opposés par le sommet; donc l'angle GEH est aussi égal à ABC.

Enfin l'angle FEH ou DEG est supplémentaire de ABC.

Corollaire. — *Deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires ;* car, si l'on fait tourner l'un d'eux de 90° autour de son sommet, ses côtés deviennent parallèles à ceux de l'autre.

Remarque. — Quand deux angles ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires, s'ils sont de même espèce, c'est à dire tous deux aigus ou tous deux obtus, ils sont égaux; s'ils sont d'espèces différentes, ils sont supplémentaires.

## ANGLE DE DEUX DROITES

45. *Orientation d'un plan.* — On peut faire tourner, dans un plan, une droite autour d'un de ses points dans deux sens différents. L'un de ces deux sens, celui qu'on veut, s'appelle *sens direct,*, l'autre est appelé *sens rétrograde.* On dit qu'un plan est *orienté* quand on a indiqué celui des deux sens que l'on regarde comme le sens direct. Dans ce qui va suivre, nous supposerons le plan orienté et nous indiquerons, d'ordinaire, le sens direct par une flèche.

46. Soient D et D′ deux droites du plan qui se coupent en un point O (fig. 31) : on appelle *angle de* D′ *avec* D et l'on représente par la notation (D, D′) l'angle *a* compris entre 0° et 180° dont il faut faire tourner D, dans le sens direct, autour du point O, pour l'amener à coïncider avec D′.

Quand les droites D, D′ sont confondues, ou plus géné-

ralement quand elles sont parallèles, on convient de dire que l'angle (D, D') est égal à 0°.

Revenons au cas général ; considérons deux autres droites $\Delta$ et $\Delta'$ parallèles l'une à D, l'autre à D', et désignons par $b$ et par $c$ les angles (D, $\Delta'$) et ($\Delta$, $\Delta'$). On voit que $a = b = c$ comme correspondants. Par conséquent,

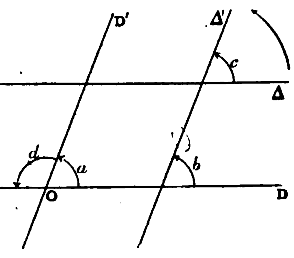


Fig. 31.

*Si deux droites* D *et* D' *sont respectivement parallèles à deux autres droites* $\Delta$ *et* $\Delta'$, *l'angle* (D, D') *est égal à l'angle* ($\Delta$, $\Delta'$).

En d'autres termes, *l'angle* (D, D') *c'est l'angle compris entre 0° et 180° dont il faut faire tourner* D, *ou une parallèle à* D, *autour de l'un de ses points, dans le sens direct, pour l'amener à être parallèle à* D'.

47. Il est essentiel de remarquer que, si l'on déplace la figure formée par les deux droites D et D' d'une façon quelconque, *pourvu qu'on ne la fasse pas sortir du plan*, l'angle (D, D') ne change pas.

Il en résulte immédiatement que, si deux droites $\Delta$ et $\Delta'$ sont respectivement perpendiculaires à deux autres droites D et D', l'angle ($\Delta$, $\Delta'$) est toujours *égal* à l'angle (D, D') ; car, si l'on fait tourner la figure formée par les deux droites D et D' de 90° autour de leur point d'intersection, ces deux droites deviennent respectivement parallèles à $\Delta$ et à $\Delta'$. Par conséquent, (D, D') = ($\Delta$, $\Delta'$).

48. **Théorème.** — *Si* A, B, C, ..., L *sont des droites quelconques du plan, on a*

$$(A, B) + (B, C) + \dots + (L, A) = 180^\circ \times k,$$

k *désignant un nombre entier.*

En effet, faisons tourner *dans le sens direct* une droite $\Delta$ du plan autour d'un de ses points, cette droite étant, dans sa position initiale, parallèle à A. Lorsque cette droite sera devenue parallèle à B, elle aura décrit un angle égal à (A, B) ; la rotation continuant dans le même sens, quand $\Delta$ sera devenue paral-

lèle à C, elle aura décrit, dans cette seconde phase, un angle égal à (B, C) et l'angle total décrit depuis sa position initiale sera égal à (A, B) + (B, C), et ainsi de suite. Quand $\Delta$ aura repris sa position initiale après être devenue successivement parallèle aux droites B, C, ..., L, l'angle total décrit par $\Delta$ sera égal à la somme des angles qu'elle aura décrits successivement en passant d'une position à la suivante, puisque toutes les rotations sont effectuées dans le même sens. La droite $\Delta$ aura donc tourné d'un angle égal à

$$(A, B) + (B, C) + \dots + (L, A).$$

Or cette droite, ayant repris sa position initiale, a décrit un angle égal à un multiple de 180° ; donc, en désignant par $k$ un nombre entier,

$$(A, B) + (B, C) + \dots + (L, A) = 180^\circ \times k.$$

Cet entier $k$ peut d'ailleurs être nul si toutes les droites A, B, C,...., L sont parallèles.

49. En particulier, si on ne considère que deux droites D et D', on a

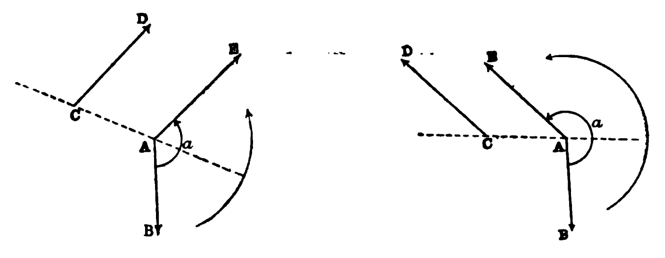
$$(D, D') + (D', D) = 180^\circ.$$

En effet, en se reportant à la figure 31, on voit que les angles (D, D') et (D', D), qui sont désignés par $a$ et $d$, sont supplémentaires.

### ANGLE DE DEUX DEMI-DROITES

50. Soient $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ (fig. 32 et 33), deux demi-droites du plan ; menons par le point A une demi-droite $\overline{AE}$ parallèle à $\overline{CD}$ et de même sens (c'est à dire telle que les droites AE et CD soient parallèles et que les points D et E soient situés d'un même côté par rapport à la droite AC). On appelle angle de $\overline{CD}$ avec $\overline{AB}$ et on désigne par la notation $(\overline{AB}, \overline{CD})$ l'angle $a$ compris entre 0° et 360° dont il faut faire tourner la demi-

droite $\overline{AB}$ autour du point A, dans le sens direct, pour l'amener à coïncider avec la demi-droite AE.




Fig, 32. Fig. 33.

Si cet angle $a$ est moindre que 180° (fig. 32), il se confond avec l'angle que fait la *droite* CD avec la *droite* AB ; dans ce cas,

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = (AB, CD).$$

Au contraire, si cet angle $a$ est plus grand que 180° (fig. 33), on a

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = (AB, CD) + 180^\circ.$$

Dans les deux cas, on peut écrire

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = (AB, CD) + 180^\circ \times k.$$

$k$ étant égal à 0 ou à 1.

*Cas particuliers.* — Si les demi-droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont parallèles et de sens contraires,

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = 180^\circ.$$

Si elles sont parallèles et de même sens, on convient de dire que l'angle $(\overline{AB}, \overline{CD})$ est égal à 0°.

51. **Théorème.** — *Si* $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, ..., $\overline{L}$ *sont des demi-droites quelconques du plan, on a*

$$(\overline{A}, \overline{B}) + (\overline{B}, \overline{C}) + \ldots + (\overline{L}, \overline{A}) = 360^\circ \times k,$$

k *désignant un nombre entier.*

Même démonstration que pour des droites.

En particulier, si on ne considère que deux demi-droites $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ (fig. 32 et 33), on a

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) + (\overline{CD}, \overline{AB}) = 360^\circ.$$

EXERCICES

1. — A, B, C,..., K, L étant des droites quelconques du plan, démontrer que

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (K, L) = (A, L) + 180\, k.$$

Il suffit de retrancher membre à membre les égalités suivantes :

$$(A, B) + (B, C) + \ldots + (K, L) + (L, A) = 180\, k',$$
$$(A, L) + (L, A) = 180^\circ.$$

2. — En particulier, on a :

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) + 180\, k;$$

d'où on déduit :

$$(B, C) = (A, C) - (A, B) + 180\, k.$$

3. — $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, .., $\overline{K}$, $\overline{L}$ étant des demi-droites du plan, démontrer que

$$(\overline{A}, \overline{B}) + (\overline{B}, \overline{C}) + \ldots + (\overline{K}, \overline{L}) = (\overline{A}, \overline{L}) + 360\, k,$$
$$(\overline{B}, \overline{C}) = (\overline{A}, \overline{C}) - (\overline{A}, \overline{B}) + 360\, k.$$

4. Soient A et B deux droites qui se coupent, C la bissectrice de l'un des angles formés par ces deux droites, D une quatrième droite du plan. Démontrer que

$$(D, A) + (D, B) = 2\,(D, C) + 180\, k.$$

On s'appuiera sur les égalités :

$$(D, A) + (A, C) = (D, C) + 180\, k,$$
$$(D, B) + (B, C) = (D, C) + 180\, k',$$
$$(A, C) + (B, C) = 180^\circ.$$

**5.** **Soient $\overline{A}$, $\overline{B}$ les deux côtés et $\overline{C}$ la bissectrice d'un angle ; $\overline{D}$ une quatrième demi-droite du plan. Démontrer que**

$$(\overline{D}, \overline{A}) + (\overline{D}, \overline{B}) = 2(\overline{D}, \overline{C}) + 360\,k.$$

**6.** **Soient $\overline{A}$, $\overline{B}$ les côtés et $\overline{C}$ la bissectrice d'un angle ; $\overline{A'}$, $\overline{B'}$ les côtés et $\overline{C'}$ la bissectrice d'un autre angle. Démontrer que**

$$(\overline{A}, \overline{A'}) + (\overline{B}, \overline{B'}) = 2(\overline{C}, \overline{C'}) + 360\,k.$$

**On retranche de l'égalité obtenue dans l'exercice 5 celle qu'on en déduit en remplaçant $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ par $\overline{A'}$, $\overline{B'}$, $\overline{C'}$.**

**7.** **Soient A, B, C, trois points d'une figure plane ; A′, B′, C′, les positions que prennent ces trois points quand la figure se déplace dans son plan d'une façon quelconque. Démontrer que**

$$(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = (\overline{AC}, \overline{A'C'}).$$

**Cette égalité est une conséquence des deux suivantes :**

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{A'C'}) + (\overline{A'C'}, \overline{A'B'}) + (\overline{A'B'}, \overline{AB}) = 360\,k,$$
$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'B'}, \overline{A'C'}).$$

**8.** **Quand deux angles ont leurs côtés parallèles ou perpendiculaires, les bissectrices de ces deux angles sont parallèles ou perpendiculaires.**

---

## CHAPITRE III

## POLYGONES, TRIANGLES

52. On appelle *polygone* une ligne brisée fermée, telle que ABCDE (fig. 34). Les portions de droites qui constituent cette ligne brisée sont les *côtés* du polygone. Les angles formés par deux côtés consécutifs sont les *angles* du polygone et les extrémités des côtés sont les *sommets* du polygone.

Les droites, telles que AC, qui joignent deux sommets non consécutifs sont les *diagonales* du polygone.

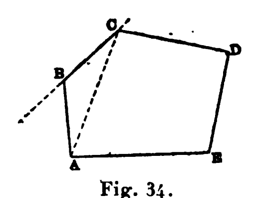


Fig. 34.

On appelle *triangle* un polygone de trois côtés ; *quadrilatère*, un polygone de quatre côtés ; *pentagone*, un polygone de cinq côtés, etc.

On dit qu'une ligne brisée, fermée ou non, est *convexe* quand elle est située tout entière d'un même côté par rapport à chacun de ses côtés prolongés. Un triangle est toujours convexe.

On dit qu'un triangle est *rectangle* quand il a un angle droit ; le côté opposé à l'angle droit est l'*hypoténuse*.

On dit qu'un triangle est *isoscèle* quand il a deux côtés égaux ; *équilatéral* quand il a ses trois côtés égaux.

Dans un triangle quelconque, on prend indifféremment pour *base* l'un quelconque des trois côtés ; le sommet opposé au côté pris pour base s'appelle le *sommet du triangle*, et la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base s'appelle la *hauteur*. Mais, dans un triangle isoscèle, c'est le point de concours des côtés égaux qu'on appelle, de préférence, le *sommet du triangle*, et le côté opposé qu'on appelle la *base*.

On appelle angle *extérieur* d'un triangle ABC (fig. 35) un angle, tel que ACD, formé par un côté CA et le prolongement d'un autre côté BC.

On appelle *médiane* d'un triangle la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé ; *bissectrice intérieure*, la bissectrice de l'un des angles du triangle ; *bissectrice extérieure*, la bissectrice de l'un des angles extérieurs ; *médiatrice*, la perpendiculaire au milieu de l'un des côtés.

53. ***Théorème.*** — *La somme des angles d'un triangle* ABC (fig. 35) *est égale à deux angles droits.*

En effet, soit CD le prolongement de BC; par le point C, menons une demi-droite CE parallèle à BA et du même côté que le point A par rapport à la droite BD. Les angles A et ACE sont égaux comme alternes internes; les angles B et DCE sont égaux comme correspondants. Donc la somme des trois angles du triangle est égale à la somme des trois angles DCE, ECA, ACB, c'est-à-dire égale à deux angles droits.

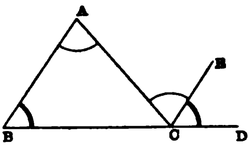


Fig. 35.

Corollaires. — I. — *L'angle extérieur* ACD *est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents* A *et* B.

Par conséquent, cet angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles A et B. On peut le démontrer directement, *sans s'appuyer sur le postulat d'Euclide,* en joignant le point B au milieu M du côté AC (fig. 36) et en prolongeant BM d'une longueur ME égale à BM. Si l'on fait tourner le triangle MAB de 180° autour du point M, il vient coïncider avec le triangle MCE. Donc l'angle A est égal à l'angle MCE et, par conséquent, moindre que l'angle ACD.

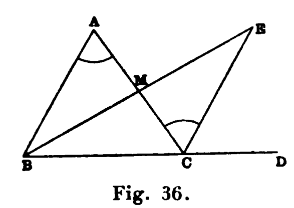


Fig. 36.

II. — *Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus ou droit.* En particulier, dans un triangle rectangle, les deux angles autres que l'angle droit valent ensemble un angle droit; donc ils sont aigus et complémentaires.

III. — *Dans un triangle, un angle quelconque est supplémentaire de la somme des deux autres.* Par consé-

quent, si deux triangles ABC, A'B'C' ont deux angles égaux chacun à chacun : $A = A'$, $B = B'$, les troisièmes angles C et C' sont aussi égaux; car

$$C = 180° - A - B = 180° - A' - B' = C'.$$

En particulier, si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, ils ont aussi l'autre angle aigu égal.

IV. — *Deux triangles* ABC, A'B'C' *qui ont les côtés parallèles ou perpendiculaires ont leurs trois angles égaux chacun à chacun.*

En effet, nous savons déjà [44, corollaire] qu'ils ont leurs angles respectivement égaux ou supplémentaires. Or il est impossible que deux angles du premier soient supplémentaires de deux angles du second; car si on avait, par exemple,

$$A + A' = 180°, \quad B + B' = 180°,$$

il en résulterait que $A + A' + B + B' = 360°$, et, comme la somme des six angles des deux triangles est précisément égale à 360°, il ne resterait rien pour les deux angles C et C'. Les deux triangles ont donc au moins deux angles égaux chacun à chacun, et alors les troisièmes angles sont aussi égaux [III].

54. **Théorème.** — *La somme des angles d'un polygone convexe* ABCDEF (fig. 37) *est égale à autant de fois deux droits que ce polygone a de côtés moins deux.*

En effet, menons par le point A les diagonales AC, AD, AE ; la somme des angles du polygone est évidemment égale à la somme des angles des triangles ABC, ACD,... Or, il y a autant de triangles que de

côtés moins deux, car on peut considérer ces triangles comme ayant pour sommet commun le point A et pour bases respectives les côtés BC, CD,... du polygone autres que les deux côtés AB, AF qui partent du point A. Mais la somme des angles de chaque triangle est égale à deux angles droits. Donc la somme des angles du polygone est égale à autant de fois deux droits qu'il y a de côtés moins deux.

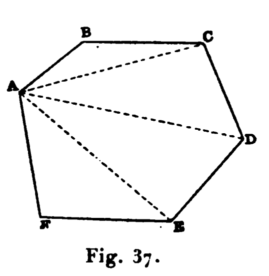


Fig. 37.

Soit $n$ le nombre des côtés ; la somme des angles du polygone est égale à

$$(n - 2) \text{ 2 droits} = (2\,n - 4) \text{ angles droits.}$$

*Cas particulier.* — Un quadrilatère convexe se compose de deux triangles; donc la somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à deux fois deux droits, c'est-à-dire égale à quatre angles droits.

55. **Théorème.** — *Dans un triangle isoscèle, aux côtés égaux sont opposés des angles égaux.*

Soit ABC (fig. 38) un triangle dans lequel les côtés AB et AC sont égaux ; il faut prouver que les angles C et B le sont aussi. En effet, menons la bissectrice AD de l'angle BAC et plions la figure autour de cette bissectrice. A cause de l'égalité des angles DAB, DAC, le côté AB prend la direction du côté AC, et, comme ces côtés sont égaux, le point B viendra en C. Or, le point D

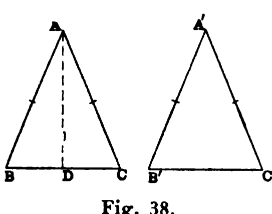


Fig. 38.

**n'a pas bougé, donc l'angle B coïncidera avec l'angle C; ces deux angles sont donc égaux.**

**COROLLAIRES. — I. — Il résulte de cette démonstration que le point D est le milieu du côté BC et que les angles en D sont égaux et, par conséquent, droits, puisque leur somme vaut deux droits. Donc,**

***Dans un triangle isoscèle, la bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux partage le côté opposé en deux parties égales et lui est perpendiculaire.***

**En d'autres termes :**

***Dans un triangle isoscèle, la même droite est en même temps bissectrice de l'angle au sommet, médiane, hauteur et médiatrice.***

**II. — *Les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux, et chacun d'eux vaut* $\frac{180°}{3} = 60°$.**

56. REMARQUE. — La démonstration précédente suppose que la bissectrice AD *existe ;* mais on peut tourner le raisonnement de manière à éviter la considération de cette bissectrice. En effet, transportons le triangle ABC en A'B'C' et reportons ce second triangle sur le premier, *après l'avoir retourné*, de manière que l'angle B'A'C' s'applique sur son égal CAB, le côté A'B' sur AC et le côté A'C' sur AB. Comme A'B' = AB = AC = A'C', le point B' tombera en C et le point C' en B ; donc l'angle B' coïncidera avec l'angle C. Mais l'angle B' n'est autre que l'angle B ; donc B = C.

Remarquons, en passant, que si on appelle D le milieu de BC, les triangles ABD et ACD sont égaux ; car on peut les faire coïncider en les portant l'un sur l'autre de manière que l'angle B coïncide avec l'angle C. Donc, 1° les angles ADB, ADC sont égaux et, par conséquent, droits ; 2° les angles BAD, CAD sont aussi égaux. Ainsi,

***Dans un triangle isoscèle, la droite qui joint le sommet au***

***milieu de la base est perpendiculaire sur cette base et bissectrice de l'angle au sommet.***

C'est, sous une autre forme, la proposition déjà énoncée dans le corollaire I ci-dessus.

57. ***Théorème.*** — *Si, dans un triangle* ABC (fig. 39), *le côté* AB *est plus grand que le côté* AC, *l'angle* C *opposé au côté* AB *est plus grand que l'angle* B *opposé au côté* AC. *Et réciproquement.*

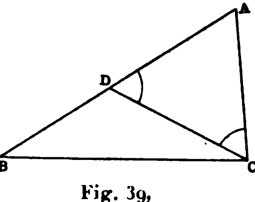


Fig. 39,

En effet, prenons sur AB une longueur AD égale à AC et traçons DC. Dans le triangle isoscèle ACD, les angles ACD et ADC sont égaux. Donc l'angle B du triangle BCD, étant moindre que l'angle *extérieur* ADC [53, corollaire I], sera aussi moindre que ACD et, à plus forte raison, moindre que l'angle total ACB.

Remarque. — L'angle B est nécessairement *aigu;* car, s'il était droit ou obtus, l'angle C serait obtus, ce qui est impossible puisque, dans un triangle, il y a au moins deux angles aigus.

58. En vertu du principe de réciprocité [19], les réciproques des deux théorèmes précédents sont vraies. En effet, si l'on compare les deux côtés AB et AC d'un triangle ABC, il n'y a que trois hypothèses possibles : ou $AB = AC$ et alors $C = B$, ou $AB > AC$ et alors $C > B$, ou $AC > AB$ et alors $B > C$. Donc, puisque les trois hypothèses possibles entraînent des conclusions différentes et incompatibles, les trois réciproques sont vraies ; c'est-à-dire que :

Si $C = B$, il faut que $AB = AC$;
Si $C > B$, il faut que $AB > AC$;
Si $B > C$, il faut que $AC > AB$.

Ainsi, *dans tout triangle, à des angles égaux sont opposés des côtés égaux, et à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

59. ***Théorème.*** — *Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

Soit ABC un triangle (fig. 40); il faut prouver que le côté BC, par exemple, est plus petit que la somme des deux autres. Pour cela, prolongeons BA d'une longueur AD égale à AC et traçons CD. Le triangle ACD est isoscèle; l'angle D est donc égal à l'angle ACD et, par suite, plus petit que l'angle BCD.

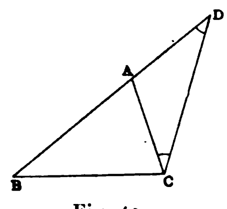


Fig. 40.

Donc [58], dans le triangle BCD, le côté BC opposé à l'angle D est moindre que le côté BD opposé à l'angle BCD; c'est-à-dire que

$$BC < AB + AC.$$

On démontrerait de même que

$$AB < BC + AC,$$
$$AC < AB + BC.$$

Des trois inégalités précédentes, on déduit que chaque côté du triangle est plus grand que la différence des deux autres; par exemple, $AC > BC - AB$, en supposant $BC > AB$.

Corollaire. — *Une ligne droite* AB (fig. 41) *est plus courte que toute ligne brisée* ACDEB *qui a mêmes extrémités.*

En effet, menons AD et AE. On a

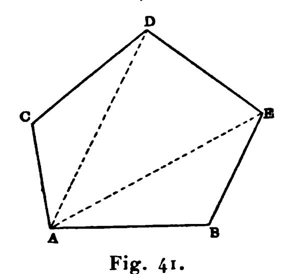


Fig. 41.

$$AC + CD > AD;$$

d'où, en ajoutant DE aux deux membres,

$$AC + CD + DE > AD + DE > AE;$$

d'où, en ajoutant EB aux deux membres extrêmes,

$$AC + CD + DE + EB > AE + EB > AB.$$

REMARQUE. — Nous verrons plus tard ce qu'il faut entendre par *longueur* d'un arc de courbe et nous pourrons en conclure que la longueur d'une ligne droite est plus petite que celle de toute autre ligne ayant mêmes extrémités. C'est ce qu'on énonce en disant :

*La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.*

En raison de cette propriété, la portion de droite qui joint deux points s'appelle *la distance de ces deux points.*

60. **Théorème.** — *Toute brisée convexe est moindre qu'une brisée quelconque qui l'enveloppe et qui a mêmes extrémités.*

Soit AEFGD (fig. 42) une brisée quelconque, convexe ou non, qui entoure la brisée convexe ABCD et qui a mêmes extrémités A et D. Prolongeons AB et BC jusqu'aux points de rencontre H et K avec la brisée enveloppante. On a [59]

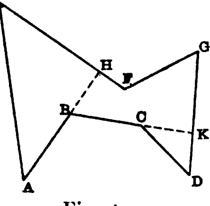


Fig. 42.

$$AB + BH < AE + EH,$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK,$$
$$CD < CK + KD.$$

D'où, en ajoutant membre à membre et supprimant les termes communs,

$$AB + BC + CD < AE + EH + HF + FG + GK + KD,$$

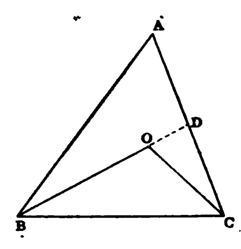


Fig. 43.

ou

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Corollaires. — I. — *Si* O *est un point intérieur à un triangle* ABC (fig. 43), *on a*

$$BO + OC < BA + AC.$$

De plus, l'angle BOC est plus grand que l'angle BAC ; car, en appelant D le point de rencontre de OB avec AC, on a $\widehat{BOC} > \widehat{BDC} > \widehat{BAC}$.

II. — *Le périmètre d'un polygone convexe* ABCDE (fig. 44) *est moindre que celui d'un polygone quelconque* FGHKLM *qui l'enveloppe.*

Prolongeons le côté AE jusqu'aux points de rencontre P et Q avec le polygone enveloppant. On a :

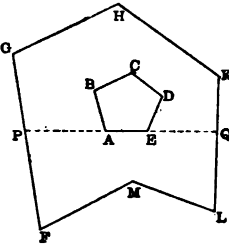


Fig. 44.

$$AB + BC + CD + DE < AP + PG + GH + HK + KQ + QE,$$
$$PA + AE + EQ < PF + FM + ML + LQ;$$

d'où, en ajoutant membre à membre et simplifiant,

$$AB + BC + CD + DE + EA < FG + GH + HK + KL + LM + MF.$$

EXERCICES

1. Soit ABC un triangle isoscèle, dans lequel AB = AC ; et soit D un point situé sur AB ou sur son prolongement. Prouver que DB est plus grand ou plus petit que DC selon que les points B, D sont, ou non, de part et d'autre de A.

2. Si, dans un triangle ABC, rectangle en A, on mène par A une droite faisant avec AB un angle égal à B et si D est le point où cette droite rencontre l'hypoténuse, les deux triangles ABD et ADC sont isoscèles; le point D est le milieu de l'hypoténuse et la médiane AD est la moitié de l'hypoténuse.

En déduire que, si, dans un triangle rectangle, un des côtés est la moitié de l'hypoténuse, l'angle opposé à ce côté est égal à 30° ; et réciproquement.

3. La somme des droites qui joignent les sommets d'un triangle à un point intérieur est moindre que le périmètre, mais plus grande que la moitié du périmètre du triangle.

4. Dans le triangle ABC, mener une sécante DE parallèle à une droite donnée $\Delta$, et telle que la partie DE comprise entre les côtés AB et AC soit égale à BD + CE.

Si on mène par B et C des droites BB', CC' parallèles à $\Delta$, la droite demandée passe par le point d'intersection des bissectrices des angles ABB', ACC'.

Comparer les segments déterminés par ces bissectrices sur la parallèle à $\Delta$ menée par A.

Examiner le cas particulier où $\Delta$ est parallèle à BC.

5. Soient ABC un triangle ; O le point de rencontre des bissectrices intérieures des angles B et C; O' celui des bissectrices extérieures de ces mêmes angles ; O'' celui de la bissectrice intérieure de l'angle B avec la bissectrice extérieure de l'angle C. Démontrer que $\widehat{BO''C} = \frac{A}{2}$, et en déduire que

$$\widehat{BOC} = 90° + \frac{A}{2}, \qquad \widehat{BO'C} = 90° - \frac{A}{2}.$$

6. Dans un triangle ABC, l'angle formé par la hauteur et la bissectrice issues du point A est égal à la demi-différence des deux angles B et C.

7. Par le sommet A d'un triangle ABC, on mène deux droites rencontrant BC en D et E et telles que les angles BAD, CAE soient respectivement égaux aux angles C, B. Prouver que AD = AE.

## CHAPITRE IV

## PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES

61. **Théorème.** — *Par un point* C *on peut mener une perpendiculaire à une droite* AB *et une seule.*

1° *Le point C est sur la droite donnée* (fig. 45). Décrivons de C comme centre, avec un rayon arbitraire, un cercle qui coupe la droite donneé aux deux points A et B. Soit D le milieu de la demi-circonférence AFB ; l'arc AD est le quart de la circonférence ; donc l'angle ACD est droit et la droite CD est perpendiculaire à AB au point C. D'ailleurs toute autre droite CE passant par le point C fera avec CA un angle plus grand ou plus petit qu'un droit, et, par conséquent, ne lui sera pas perpendiculaire.

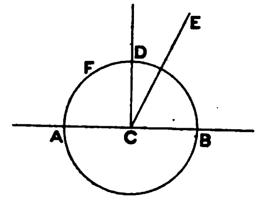


Fig. 45.

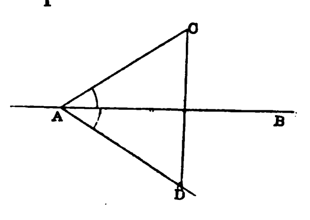


Fig. 46.

2° *Le point C est hors de la droite AB* (fig. 46). Joignons le point C à un point quelconque A de la droite AB ; puis menons par A, de l'autre côté de AB, une droite AD faisant avec AB un angle égal à BAC, et prenons sur cette droite une longueur AD égale à AC. Dans le triangle isoscèle CAD, la droite AB, qui est bissectrice de l'angle au sommet, est perpendiculaire sur la base CD. Donc CD est la perpendiculaire demandée. Il n'y en a pas d'autre ; car deux perpendiculaires à une même droite n'ont aucun point commun [40, Corollaire II].

On dit qu'une droite est *oblique* à une autre quand elle ne lui est ni perpendiculaire ni parallèle.

62. **Théorème.** — *Si, d'un point* A *pris hors d'une droite* CD (fig. 47), *on mène la perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, AE :

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques également écartées du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques inégalement écartées du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.*

Fig. 47.

1° Dans le triangle rectangle ACB, l'angle droit ABC est plus grand que l'angle aigu [1] ACB, donc [58]

$$AC > AB.$$

2° Soient AC et AD deux obliques également écartées du pied de la perpendiculaire, c'est-à-dire telles que BC = BD. Pour démontrer qu'elles sont égales, il n'y a qu'à plier la figure autour de AB ; à cause de l'égalité des angles droits ABC et ABD, le côté BC prend la direction du côté BD, et, comme BC = BD, le point C tombe au point D et AC coïncide avec AD. Donc

$$AC = AD.$$

3° Soient AD et AE deux obliques inégalement écartées du pied de la perpendiculaire et situées du même

[1] La démonstration subsiste même si l'on n'admet pas le postulat d'Euclide, car on peut toujours dire que l'angle ACB est *aigu* comme étant moindre que l'angle *extérieur* ABD, qui est droit.

côté de cette perpendiculaire. Si nous supposons $BE > BD$, dans le triangle ADE, l'angle obtus ADE est plus grand que l'angle aigu AED. Donc [58]

$$AE > AD.$$

Enfin, si l'on considère deux obliques AC et AE situées de part et d'autre de la perpendiculaire et si l'on suppose, par exemple, $BE > BC$, on pourra prendre sur BE une longueur BD égale à BC; et alors on aura, d'après ce qui précède,

$$AC = AD, \quad AD < AE.$$

Par conséquent, $AC < AE$.

Les réciproques sont vraies [19].

63. Corollaire. — *D'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener à cette droite plus de deux obliques égales.* Autrement dit, *un cercle ne peut rencontrer une droite en plus de deux points.*

La perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite est la plus courte de toutes les lignes qui joignent ce point à un point de la droite; c'est pourquoi elle s'appelle la *distance* du point à la droite.

64. ***Définition.*** — On appelle *lieu géométrique* l'ensemble des points jouissant d'une propriété commune.

***Théorème.*** — *Le lieu des points équidistants de deux points donnés* A *et* B (fig. 48) *est la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.*

1° Soit M un point équidistant de A et de B ; abaissons de ce point MP perpendiculaire sur AB. Puisque les obliques MA, MB sont égales, elles s'écartent égale-

ment du pied de la perpendiculaire; donc le point P est le milieu de AB et le point M appartient à la perpendiculaire au milieu de AB.

2° Réciproquement, tout point de la perpendiculaire au milieu de AB est équidistant de A et de B. Car, soit M un point de cette perpendiculaire : les obliques MA et MB sont égales, comme s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

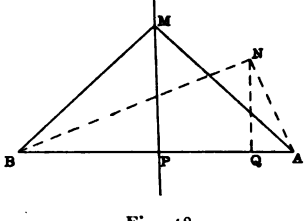


Fig. 48.

Remarque. — Tout point N situé par rapport à la perpendiculaire au milieu de AB du même côté que A est plus rapproché de A que de B. Car si on abaisse NQ perpendiculaire sur AB, on a QA < QB ; par suite, NA < NB.

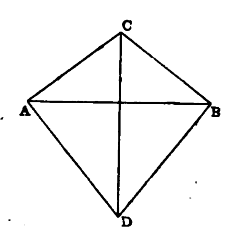


Fig. 49.

Corollaire. — *Si deux points* C *et* D (fig. 49) *sont équidistants de deux points* A *et* B, *la droite* CD *est perpendiculaire au milieu de* AB; car, ces deux points C et D étant sur la perpendiculaire élevée au milieu de AB, cette perpendiculaire n'est autre que la droite CD elle-même.

On peut d'ailleurs le démontrer directement. Les triangles CAB, DAB étant isoscèles, les angles CAB, DAB sont respectivement égaux aux angles CBA, DBA ; donc les angles CAD, CBD sont égaux, comme sommes ou comme différences d'angles égaux, selon que les points C et D sont, ou non, de part et d'autre de AB. Il en résulte qu'on peut faire coïncider les deux triangles CAD, CBD, en les portant l'un sur l'autre de façon que l'angle CAD coïncide avec son égal CBD. Donc les

angles ACD, BCD sont égaux, c'est-à-dire que la droite CD est bissectrice de l'angle ACB ; et alors, dans le triangle isoscèle ACB, cette droite CD est perpendiculaire au milieu de la base AB [55].

## SYMÉTRIE

65. On dit que deux points A et A′ (fig. 50) sont *symétriques par rapport à un point* O, quand le point O est le milieu de la droite AA′.

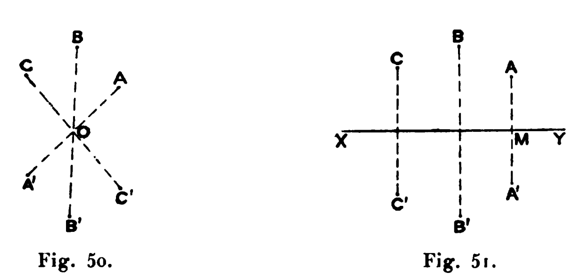



Fig. 50. Fig. 51.

On dit que deux points A et A′ (fig. 51) sont *symétriques par rapport à une droite* XY, quand la droite XY est perpendiculaire sur le milieu de AA′.

On dit que deux figures ABC..., A′B′C′..., sont symétriques par rapport à un point O (fig. 50), ou par rapport à une droite XY (fig. 51), quand les points de l'une sont symétriques des points de l'autre par rapport à ce point O, ou par rapport à cette droite XY.

66. **Théorème.** — *Deux figures planes symétriques par rapport à un point ou à une droite sont égales.*

1° Soient ABC... et A′B′C′... (fig. 50), deux figures symétriques par rapport au point O, de sorte que le point O est le milieu de AA′, de BB′, etc. Faisons tourner la première figure de 180° autour du point O : le point A

vient coïncider avec le point A′, le point B avec le point B′, etc. Donc les deux figures sont superposables.

Le point O s'appelle le *centre de symétrie* des deux figures.

2° Soient ABC... et A′B′C′... (fig. 51) deux figures symétriques par rapport à une droite XY, de sorte que XY est perpendiculaire au milieu de AA′, de BB′, etc. Faisons tourner le plan autour de XY comme charnière jusqu'à ce qu'il revienne coïncider avec sa position primitive. L'angle droit XMA vient coïncider avec l'angle droit XMA′ et comme MA = MA′, le point A tombe en A′ ; de même B en B′, etc. Donc la figure ABC... coïncide avec la figure A′B′C′...

La droite XY s'appelle *l'axe de symétrie* des deux figures.

Il est essentiel de remarquer que deux figures symétriques par rapport à un point peuvent être appliquées l'une sur l'autre *sans qu'on ait besoin de les faire sortir du plan;* c'est pourquoi on dit qu'elles sont *directement superposables*. Au contraire, pour faire coïncider deux figures symétriques par rapport à une droite, *il faut retourner l'une d'elles :* c'est ce qu'on exprime en disant qu'elles sont *inversement superposables*.

Nous verrons dans la seconde partie ce qu'il faut entendre par *rotation autour d'un axe*. La symétrie par rapport à une droite, dans le plan ou dans l'espace, est une rotation de 180° autour de cette droite. La symétrie *dans le plan*, par rapport à un point, est une rotation de 180° autour d'une droite perpendiculaire au plan et passant par ce point; il n'en est pas de même dans l'espace, et deux figures non planes symétriques par

rapport à un point ne sont pas, en général, superposables.

Corollaires. — I. — *La figure symétrique d'une droite par rapport à un centre ou par rapport à un axe est une droite.*

Deux droites symétriques par rapport à un axe rencontrent cet axe en un même point, ou sont toutes deux parallèles à cet axe.

II. — Soient A et B deux droites respectivement symétriques à deux autres droites A′ et B′ *par rapport à un axe;* on a

$$(A, B) + (A', B') = 180^\circ.$$

De même, soient $\overline{A}$ et $\overline{B}$ deux demi-droites respectivement symétriques de deux autres demi-droites $\overline{A'}$ et $\overline{B'}$ par rapport à un axe; on a

$$(\overline{A}, \overline{B}) + (\overline{A'}, \overline{B'}) = 360^\circ.$$

EXERCICES

1. Soient A et B deux points; A′ le symétrique de A par rapport à XY; C le point de rencontre de A′B avec XY; D un autre point quelconque de XY.

Si A et B sont d'un même côté de XY, on a

$$AC + CB < AD + DB;$$

par suite, ACB est le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant la droite XY.

Si A et B sont de part et d'autre de XY, on a

$$|AC - CB| > |AD - DB|.$$

2. Etant donnés deux points A et B situés dans un angle, trouver le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant les deux côtés de l'angle.

3. Etant donnés deux points A et B intérieurs à un triangle, trouver le plus court des chemins qui vont de A en B, en touchant les trois côtés du triangle.

4. Si d'un point A on mène à une droite une perpendiculaire AB et trois obliques AC, AD, AE telles que les angles CAD, DAE soient égaux, démontrer que CD < DE si BC < BE.

5. Dans tout triangle, une bissectrice est toujours comprise entre la médiane et la hauteur issues du même sommet.

---

CHAPITRE V

# CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

67. Rappelons d'abord [4] que deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux, par définition, quand on peut les appliquer l'un sur l'autre de façon que le point A' coïncide avec le point A, le point B' avec le point B et le point C' avec le point C. Ainsi, l'égalité de ces deux triangles implique six conditions :

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'};$$
$$BC = B'C', \quad CA = C'A', \quad AB = A'B'.$$

Nous allons voir que trois de ces conditions convenablement choisies entraînent les trois autres.

68. ***Théorème.*** — *Deux triangles* ABC, A'B'C' (fig. 52) *sont égaux :*

1° *Quand ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun ;*

2° *Quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun ;*

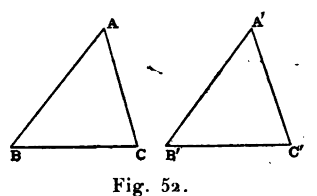


Fig. 52.

3° *Quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

En effet :

1° Supposons $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Portons

le triangle A'B'C' sur le triangle ABC de manière que B'C' coïncide avec son égal BC, le point B' avec le point B et le point C' avec le point C. L'angle B' étant égal a l'angle B, le côté B'A' prendra la direction de BA et le point A' tombera quelque part sur BA. Pareillement, à cause de l'égalité des angles C et C', le côté C'A' prendra la direction de CA et le point A' tombera quelque part sur CA. Mais alors le point A', devant tomber à la fois sur AB et sur AC, viendra se placer à l'intersection de ces deux droites, c'est-à-dire en A. Les triangles coïncideront, donc ils sont égaux.

2° Supposons A = A', AB = A'B', AC = A'C'.

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que l'angle A' coïncide avec son égal A, en ayant soin que le côté A'B' prenne la direction de AB et A'C' celle de AC; comme A'B' = AB et A'C' = AC, le point B' viendra en B et le point C' en C; donc les deux triangles coïncideront.

3° Supposons BC = B'C', CA = C'A', AB = A'B' (fig. 53).

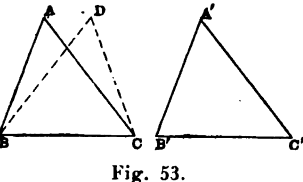


Fig. 53.

Portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de manière que le côté B'C' coïncide avec son égal BC, le point B' avec le point B, le point C' avec le point C, et de manière que le point A' tombe du même côté que A par rapport à BC. Il s'agit de prouver que le point A' tombera en A. En effet, s'il tombait en un point D différent de A, on aurait DB = AB et DC = AC ; par conséquent [64, corollaire], BC serait perpendiculaire au milieu de AD, ce qui est impossible, *puisque*

*les points* A *et* D *sont d'un même côté de* BC. Donc le point A′ tombera en A et les deux triangles coïncideront.

### CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

69. ***Théorème.*** — *Deux triangles* ABC, A′B′C′ (fig. 54) *rectangles en* A *et en* A′ *sont égaux :*

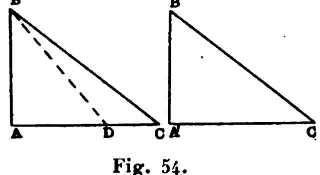



Fig. 54.

1° *Quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal ;*

2° *Quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

En effet :

1° Supposons BC = B′C′, C = C′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que l'angle C′ coïncide avec l'angle C, que le côté C′A′ prenne la direction de CA et le côté C′B′ celle de CB. Comme C′B′ = CB, le point B′ viendra en B et le côté B′A′ deviendra perpendiculaire à AC et, par suite, coïncidera avec BA ; car du point B on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur BA [61]. Donc les deux triangles coïncideront ([1]).

2° Supposons BC = B′C′, BA = B′A′.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de manière que l'angle droit A′ coïncide avec l'angle droit A, que le côté A′B′ prenne la direction de AB et A′C′ celle de AC; comme A′B′ = AB, le point B′ viendra en B. Le point C′ viendra en C; car, s'il tombait en un point D

---

([1]) La démonstration précédente est indépendante du postulat d'Euclide. En s'appuyant sur ce postulat, on peut remarquer que, si C = C′, on a aussi B = B′, et on est ramené à un cas précédent [68, 1°].

situé entre A et C ou sur le prolongement de AC au delà de C, les obliques BC, BD s'écarteraient inégalement du pied de la perpendiculaire et seraient inégales [62], ce qui est contre l'hypothèse, puisque BD = B′C′ = BC. Donc les deux triangles coïncideront.

70. **Théorème.** — *Quand deux triangles* ABC, A′B′C′ (fig. 55 et 56) *ont deux côtés égaux chacun à chacun :* AB = A′B′, AC = A′C′ :

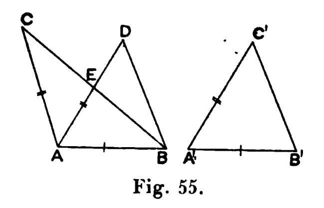


Fig. 55.

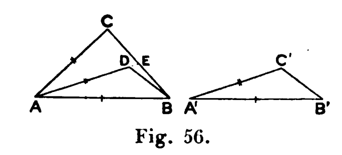


Fig. 56.

1° *Si les angles compris* A, A′ *sont égaux, les côtés opposés* BC, B′C′ *le sont aussi ;*

2° *Si les angles compris sont inégaux, les côtés opposés le sont aussi et au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

La première partie a déjà été démontrée [68,2°].

Supposons donc A > A′ et démontrons que BC > B′C′. Pour cela, portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de manière que A′B′ coïncide avec AB et que le côté A′C′ tombe en AD à l'intérieur de l'angle BAC, ce qui est possible, puisque A > A′. La droite AD, prolongée s'il le faut, rencontre BC en un point E.

On a

$$BE + ED > BD.$$

Mais AD = AC; donc ED est égal à la différence entre les côtés AE et AC du triangle ACE et, par suite, moindre que le troisième côté EC :

$$ED < EC.$$

Donc on a, à plus forte raison,

$$BE + EC > BD,$$

ou

$$BC > B'C'.$$

Il peut arriver (fig. 57) que le point D coïncide avec le point E ; dans ce cas on a immédiatement BC > BD ou BC > B'C'.

Les réciproques sont vraies [19]. Donc

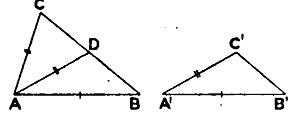


Fig. 57.

*Si deux triangles* ABC, A'B'C' *ont deux côtés égaux chacun à chacun :* AB = A'B', AC = A'C',

1° *Si les troisièmes côtés* BC, B'C' *sont égaux, les angles opposés le sont aussi;* et alors les triangles sont égaux, ce qui démontre à nouveau l'égalité de deux triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun;

2° *Si les troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés le sont aussi et au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

71. **Théorème.** — *Si, dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse reste constante, l'un des côtés de l'angle droit augmente, l'angle opposé augmente aussi et l'angle aigu adjacent diminue, ainsi que l'autre côté de l'angle droit.*

Soient ABC, AB'C' (fig. 58), deux triangles rectangles dont les hypoténuses BC, B'C' sont égales ; il faut prouver que, si AB > AB', on a

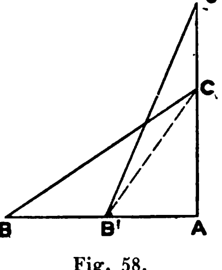


Fig. 58.

$$\widehat{ACB} > \widehat{AC'B'} \quad \widehat{ABC} < \widehat{AB'C'}, \quad AC < AC'.$$

En effet, on peut toujours supposer qu'on a porté les deux triangles l'un sur l'autre de manière à faire coïncider les angles droits. Alors, en menant $CB'$, comme $AB > AB'$, on aura $CB > CB'$; mais $CB = C'B'$, donc $B'C' > B'C$ ; ce qui prouve que $AC' > AC$, et par conséquent,

$$\widehat{AC'B'} < \widehat{ACB'} < \widehat{ACB}, \quad \widehat{AB'C'} > \widehat{AB'C} > \widehat{ABC}.$$

Les réciproques sont vraies [19].

72. **Théorème.** — *Le lieu des points situés dans un angle* BAC (fig. 59), *à égale distance des côtés de cet angle, est la bissectrice.*

Fig. 59.

1° Soit M un point dont les distances MD, ME aux deux côtés de l'angle sont égales. Les triangles rectangles MAD, MAE sont égaux, comme ayant l'hypoténuse commune et un côté de l'angle droit égal; donc les angles MAD, MAE sont égaux, et, si le point M est dans l'angle BAC, il est sur la bissectrice AX de cet angle.

2° Soit M un point de cette bissectrice; les angles MAB, MAC sont égaux. Donc, si on abaisse MD, ME perpendiculaires sur AB, AC, les triangles rectangles MAD, MAE seront égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un angle aigu égal. Donc $MD = ME$.

Il importe de remarquer que tout point N situé dans l'angle CAX est plus rapproché de AC que de AB. Car, si on abaisse NP, NQ perpendiculaires sur AB, AC, les triangles rectangles NAP, NAQ ont l'hypoténuse commune, et l'angle aigu NAP, qui est égal à l'angle NAB ou

à son supplément, est dans les deux cas plus grand que l'angle aigu NAQ, qui est toujours égal à NAC. Par conséquent [71], NP > NQ.

Cette démonstration est indépendante du postulat d'Euclide. En s'appuyant sur ce postulat, on peut mener par le point N (fig. 60) la parallèle à la bissectrice AX, qui rencontre AC en A′, puis par A′ la parallèle à AB, qui rencontre NP en P′. On a

$$NQ = NP' < NP.$$

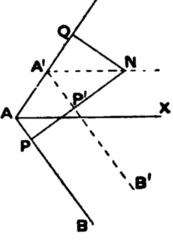


Fig. 60.

Corollaire. — *Le lieu des points du plan équidistants de deux droites qui se coupent se compose des deux droites rectangulaires qui sont les bissectrices des quatre angles formés par ces deux droites.*

EXERCICES

1. Si l'on prend sur l'un des côtés d'un angle XOY des longueurs arbitraires OA, OB et sur l'autre des longueurs OA′, OB′ respectivement égales aux premières, les droites AB′, BA′ se coupent sur la bissectrice de l'angle.

2. Dans tout triangle, une médiane est moindre que la demi-somme des côtés qui la comprennent.

On considérera le triangle BCE (fig. 36) obtenu en prolongeant la médiane BM d'une longueur égale à elle-même.

3. Dans tout triangle à un plus grand côté est opposée une plus petite médiane et réciproquement.

Dans le triangle ABC, supposons AB > AC, prolongeons la médiane BD d'une longueur DF = BD, la médiane CE d'une longueur EG = CE ; puis prenons sur AB une longueur AH = AC. L'angle AHF est aigu ; donc

$$BF > FH > CG.$$

4. Un triangle est isoscèle quand l'une des médianes est en même temps hauteur et bissectrice.

5. **Quand deux hauteurs d'un triangle sont égales, le triangle est isoscèle.**

En général, dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite hauteur.

6. Deux polygones de $n$ côtés sont égaux :

1° Quand ils ont $n-2$ côtés consécutifs égaux et adjacents à $n-1$ angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre ;

2° Quand ils ont $n-1$ côtés égaux comprenant $n-2$ angles égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre ;

3° Quand ils ont $n$ côtés égaux et $n-3$ angles égaux chacun et disposés dans le même ordre.

— Dans les deux premiers cas, il n'y a qu'à porter les deux polygones l'un sur l'autre. Dans le troisième, en joignant les sommets des trois angles restants, on partage les polygones en polygones partiels égaux chacun à chacun.

On voit que l'égalité de deux polygones de $n$ côtés exige $2n-3$ conditions.

7. Deux polygones d'un même nombre de côtés sont égaux quand ils ont un côté égal et que toutes les droites joignant les extrémités de ce côté aux autres sommets sont égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre.

8. Le nombre des diagonales d'un polygone de $n$ côtés est $\frac{n(n-3)}{2}$.

9. Dans tout quadrilatère convexe, le périmètre est plus grand que la somme des diagonales et moindre que le double de cette somme.

10. Dans tout quadrilatère croisé, la différence de deux angles opposés est égale à la différence des deux autres.

11. Dans tout quadrilatère convexe, 1° les bissectrices de deux angles consécutifs se coupent sous un angle égal à la demi-somme des deux autres; 2° les bissectrices de deux angles opposés se coupent sous un angle égal à la demi-différence des deux autres.

12. Dans un quadrilatère ABCD ayant un angle rentrant C, la somme des trois autres angles est égale à BCD; les bissectrices des angles B et D se coupent sous un angle égal à la demi-somme des angles A et BCD. — En déduire que, dans tout quadrilatère convexe, les bissectrices des angles formés par les côtés opposés se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux angles opposés.

# CHAPITRE VI

## PARALLÉLOGRAMMES

73. On appelle *parallélogramme* un quadrilatère ABCD (fig. 64), dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Un parallélogramme est toujours convexe.

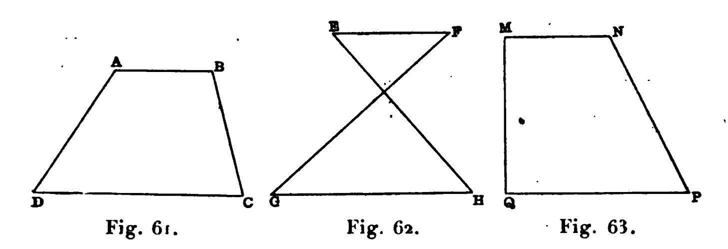



Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63.

On appelle *trapèze* un quadrilatère qui a seulement deux côtés opposés parallèles (fig. 61, 62, 63). Les côtés parallèles s'appellent les *bases*. Un trapèze est *isoscèle*, si les côtés opposés non parallèles sont égaux ; *rectangle*, si l'un des côtés non parallèles est perpendiculaire aux bases (fig. 63).

Un trapèze peut être *convexe* (fig. 61) ou *croisé* (fig. 62).

Fig. 64.

74. **Théorème.** — *Dans tout parallélogramme* ABCD (fig. 64), *les côtés opposés sont égaux ainsi que les angles opposés et les diagonales se coupent en parties égales.*

1° Les triangles ABC, CDA sont égaux comme ayant un côté commun adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ comme alternes internes et

$\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$ pour la même raison. Donc AB = CD, BC = DA et $\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$.

On démontre de même que $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

2° Soit O le point de rencontre des diagonales ; les triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un côté égal AB = CD [1°] adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ comme alternes internes et $\widehat{OBA} = \widehat{ODC}$ pour la même raison. Donc OA = OC, OB = OD, c'est-à-dire que les diagonales AC et BD se coupent en parties égales.

75. ***Théorème.*** — *Un quadrilatère* ABCD *est un parallélogramme :*

1° *S'il est convexe et si les côtés opposés sont égaux deux à deux ;*

2° *S'il est convexe et si deux côtés opposés sont égaux et parallèles ;*

3° *Si les diagonales se coupent en parties égales.*

En effet :

1° Supposons que le quadrilatère ABCD (fig. 65) soit convexe et que AB = CD, BC = AD. Les triangles ABC, CDA sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun ; donc les angles BAC et DCA sont égaux, ce qui prouve le parallélisme des droites AB et CD. Pareillement, les droites BC et AD sont parallèles à cause de l'égalité des angles BCA et DAC. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

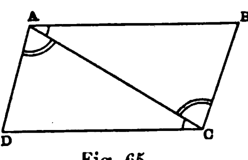


Fig. 65.

2° Supposons que le quadrilatère ABCD (fig. 65) soit convexe et que les côtés AB et CD soient égaux et parallèles. Les triangles ABC et CDA sont égaux comme ayant un angle égal : $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ comme alternes internes, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles BCA et DAC sont égaux, ce qui prouve le parallélisme des droites BC et AD. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

D'ailleurs, pour que le quadrilatère ABCD soit convexe, il suffit que les côtés AB et DC soient parallèles et *de même sens*.

3° Supposons que les diagonales AC et BD (fig. 66) se coupent en parties égales : OA = OC, OB = OD. Comme les angles AOB, COD opposés par le sommet sont égaux, les triangles AOB, COD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$, ce qui prouve le parallélisme des droites AB et CD. On prouverait de même que AD et BC sont parallèles. Donc le quadrilatère est un parallélogramme.

76. On dit qu'un point est *centre* d'une figure quand les points de la figure sont deux à deux symétriques par rapport à ce point.

*Le point de rencontre* O (fig. 66) *des diagonales est le centre du parallélogramme.*

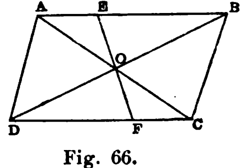


Fig. 66.

Car, soit EF une sécante passant par ce point ; les triangles OAE, OCF sont égaux comme ayant un côté égal, OA = OC, adjacent à deux angles égaux chacun

à chacun. Donc OE= OF et les points E et F sont symétriques par rapport au point O.

Remarquons que AE = CF ; donc, si E est le milieu de AB, F sera aussi le milieu de CD. Par conséquent,

*Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un parallélogramme passent par le centre.*

77. On appelle *rectangle* un quadrilatère convexe ABCD (fig. 67) dont les quatre angles sont égaux et, par conséquent, droits, puisque la somme des angles d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.

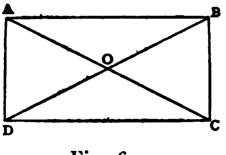


Fig. 67.

*Tout rectangle* ABCD *est un parallélogramme;* car deux côtés opposés, par exemple, AD et BC, sont parallèles comme étant perpendiculaires à la même droite CD. Il en résulte que les côtés opposés d'un rectangle sont égaux : par exemple, AD = BC. Par conséquent,

*Deux droites parallèles* AB *et* CD *sont partout également distantes.*

78. **Théorème.** — *Les diagonales d'un rectangle* ABCD *sont égales.* Car les triangles ADC, BCD sont égaux comme ayant un angle égal : $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ comme droits, compris entre côtés égaux chacun à chacun. Donc AC = BD.

Réciproque. — *Un parallélogramme* ABCD *dont les diagonales sont égales est un rectangle.*

Car, si AC = BD, les deux triangles ADC, BCD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Donc les angles ADC et BCD sont égaux, et, comme

ils sont supplémentaires, chacun d'eux vaut un droit. Donc ce parallélogramme est un rectangle.

79. Corollaire. — *Dans tout triangle rectangle* ABC, *la médiane* BO *issue du sommet de l'angle droit est moitié de l'hypoténuse, et réciproquement.*

80. On appelle *losange* un quadrilatère convexe ABCD (fig. 68) dont les quatre côtés sont égaux.

Un losange est un parallélogramme [75, 1°].

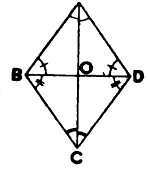


Fig. 68.

***Théorème.*** — *Les diagonales d'un losange se coupent à angle droit et sont les bissectrices des angles du losange.*

Car les points A et C étant équidistants de B et de D, la droite AC est perpendiculaire au milieu O de BD. Mais alors les triangles rectangles AOB, AOD sont égaux; donc AC est bissectrice de l'angle A.

Réciproques. — 1° *Un quadrilatère* ABCD *dont les diagonales sont perpendiculaires en leurs milieux est un losange.*

Car AB = BC, BC = CD, CD = DA, comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

2° *Un quadrilatère* ABCD *est un losange quand les diagonales sont bissectrices de trois des angles du quadrilatère.*

Car, si AC est bissectrice des deux angles A et C, les triangles ABC, ADC sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc AB = AD, CB = CD.

Par conséquent, les angles ABD, ADB sont égaux,

ainsi que les angles CBD, CDB; si donc BD est bissectrice de l'angle ABC, ces quatre angles sont égaux et les triangles isoscèles ABD, CBD sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux; d'où

$$AB = BC = CD = DA.$$

81. On appelle *carré* un quadrilatère convexe dont les quatre côtés sont égaux et dont les quatre angles sont égaux et, par conséquent, droits.

Un carré est à la fois un rectangle et un losange. Par conséquent,

*Les diagonales d'un carré sont égales, elles se coupent à angle droit et sont bissectrices des angles du carré.*

### EXERCICES

1. Dans un triangle ABC (fig. 69) la droite DE qui joint les milieux de deux côtés, AB et AC, est parallèle au troisième côté et égale à sa moitié.

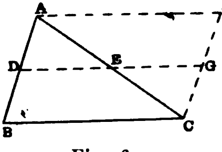


Fig. 69.

— En effet, le point E est le centre du parallélogramme ABCF; la droite DE passe par le milieu G de CF. Donc BD = CG et BDGC est un parallélogramme, etc.

2. Dans un triangle ABC, la parallèle au côté BC menée par le milieu du côté AB passe par le milieu du troisième côté.

En général, si des parallèles interceptent sur une droite des longueurs égales, elles interceptent aussi des longueurs égales sur toute autre droite.

3. Dans tout triangle, les trois médianes concourent en un même point, qui est au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé.

— Car, soit O le point de concours des deux médianes BE, CF d'un triangle ABC ; menons par A une parallèle à BE, qui rencontre CF en un point G. On voit aisément que le point O est le milieu de CG et F le milieu de OG. Donc OF est le tiers de CF, etc.

Nous donnerons plus loin une autre démonstration.

Il est aisé d'en déduire que, dans tout triangle, à un plus grand côté est opposée une plus petite médiane. Car soit O le point de concours des trois médianes AD, BE, CF d'un triangle ABC ; les deux points A et O sont situés du même côté de la perpendicu-

laire au milieu D de BC. Donc, si AB > AC, il en résulte que OB > OC, et, par suite,

$$BE > CF\,;$$

$$\text{car } BE = \frac{3}{2}\,BO \text{ et } CF = \frac{3}{2}\,CO.$$

(Voir p. 49, Ex. 3, une autre démonstration indépendante du postulat d'Euclide).

4. On peut toujours construire un triangle ayant pour côtés les médianes d'un triangle donné.

Il suffit de tracer la médiane CD et de joindre les points C et D au milieu de AF (fig. 69).

5. Dans un trapèze, la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases, passe par les milieux des diagonales et est égale à la demi-somme ou à la demi-différence des bases, selon que le trapèze est convexe ou croisé.

6. Les droites qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère forment un parallélogramme dont les diagonales se rencontrent au milieu de la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

7. Le lieu des points équidistants de deux droites parallèles est une droite parallèle aux deux premières.

8. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère convexe forment un quadrilatère dont les angles opposés sont supplémentaires. Si le premier quadrilatère est un parallélogramme, le second est un rectangle dont les diagonales sont parallèles aux côtés du parallélogramme et égales à leur différence. Si le premier quadrilatère est un rectangle, le second est un carré.

9. Dans un trapèze isoscèle, les angles opposés sont supplémentaires.

10. Les parallélogrammes inscrits dans un parallélogramme donné (c'est-à-dire ayant leurs sommets sur les côtés de ce parallélogramme ou sur leurs prolongements), ont même centre que ce parallélogramme.

11. Prouver qu'on peut inscrire dans un rectangle des parallélogrammes dont les côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle, et que tous ces parallélogrammes ont même périmètre.

12. Si par un point de la base d'un triangle isoscèle on mène des parallèles aux deux autres côtés, le périmètre du parallélogramme ainsi formé reste constant quand le point se déplace sur la base. Examiner le cas où le point est sur le prolongement de la base.

13. Par un point M de la base d'un triangle, on mène des parallèles aux deux autres côtés. Trouver le lieu décrit par le centre du parallélogramme ainsi formé, quand le point M se déplace sur la base. — Une droite parallèle à la base.

14. Dans un triangle isoscèle, la somme des distances d'un point de la base aux deux autres côtés reste constante quand le point se déplace sur la base. — Si le point se déplace sur le prolongement de la base, c'est la différence des distances qui reste constante.

15. Trouver le lieu des points tels que la somme (ou la différence) de leurs distances à deux droites données soit égale à une longueur donnée.

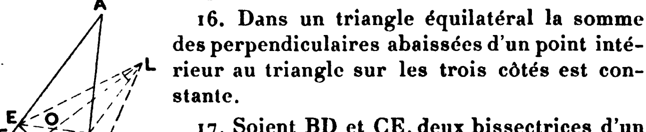


Fig. 70.

16. Dans un triangle équilatéral la somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur au triangle sur les trois côtés est constante.

17. Soient BD et CE, deux bissectrices d'un triangle ABC (fig. 70), démontrer que, si AB > AC, on a

$$BE > ED > DC.$$

— En menant par D une parallèle à BC, qui rencontre AB en F, il est aisé de voir que le point F est plus rapproché de BC que de AC. Donc ce point F est situé entre B et E ; par suite

$$\widehat{EDB} > \widehat{DBE}, \text{ etc.}$$

18. Dans tout triangle ABC, à un plus grand côté est opposée une plus petite bissectrice.

— Conservons les notations et les hypothèses de l'exercice précédent. Soit O le milieu de DE ; prolongeons BO d'une longueur OL égale à BO. Dans le triangle CEL, on a $\widehat{ELD} = \widehat{EBD} < \widehat{ECD}$, puis $\widehat{DLC} < \widehat{DCL}$, car DL = BE > DC [Ex. 17] ; par conséquent, $\widehat{ELC} < \widehat{ECL}$, etc.

*Autre démonstration, indépendante du postulatum d'Euclide.* (fig. 71). Supposons toujours $\hat{C} > \hat{B}$ et prenons sur le prolongement de BC un point C′ tel que $\widehat{DC'B} = B$ ; menons C′D, qui rencontre AB en A′, puis menons la bissectrice C′F de l'angle C′. On montre aisément que le point F est plus rapproché de BC que de AC : donc BE > BF ; mais BF = DC′ > DC ; par suite, BE > DC et le reste comme ci-dessus.

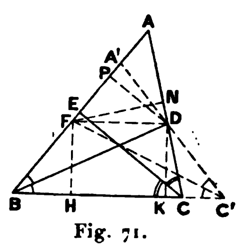



Fig. 71.

19. Dans un triangle rectangle, la différence des angles aigus

est égale à l'angle formé par la hauteur et la médiane issues du sommet de l'angle droit.

20. Dans un triangle, un angle est ***droit, obtus*** ou ***aigu*** selon que la médiane issue du sommet de cet angle est égale, inférieure ou supérieure à la moitié du côté opposé [79].

21. Deux trapèzes sont égaux quand leurs bases et leurs côtés non parallèles sont égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.

— Car, en menant dans chaque trapèze par l'extrémité de l'un des côtés non parallèles une parallèle à l'autre, on forme deux triangles égaux, et si on fait coïncider ces triangles, les trapèzes coïncideront.

22. Deux parallélogrammes sont égaux quand ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

23. Sur un billard rectangulaire on lance une bille parallèlement à une diagonale. Prouver qu'après deux réflexions elle courra parallèlement à cette diagonale et qu'après quatre réflexions elle repassera par le point de départ.

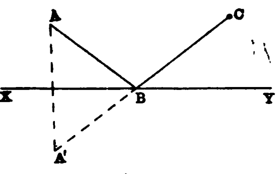


Fig. 72.

— On admet que les chemins suivis par la bille avant et après avoir touché une bande sont également inclinés sur cette bande ; par conséquent si la bille part de A (fig. 72), touche la bande XY en B et se réfléchit suivant BC, le prolongement de BC passe par le point A' symétrique de A par rapport à XY.

24. Sur un billard rectangulaire, on donne deux billes A et B. Dans quelle direction faut-il lancer A pour qu'après quatre réflexions elle aille toucher B ?

25. Étant donnés deux points A et B situés de part et d'autre de deux droites parallèles, trouver sur ces parallèles deux points C et D tels que CD soit parallèle à une droite donnée et que le chemin ACDB soit minimum.

— Menez AE égale et parallèle à CD, qui est connue en grandeur et en direction ; le chemin AEDB équivaut au chemin ACDB. Comme la partie AE est constante, on est ramené à chercher le minimum du chemin EDB.

Généraliser la question en supposant un nombre quelconque de parallèles.

26. Un parallélogramme est un losange quand les diagonales sont perpendiculaires, ou quand l'une des diagonales est bissectrice de l'un des angles du parallélogramme.

27. Un parallélogramme est un carré quand les diagonales sont égales et perpendiculaires entre elles.

# LIVRE II

# CERCLE

## CHAPITRE PREMIER

## ARCS ET CORDES D'UN CERCLE

82. ***Théorème.*** — *Le diamètre est la plus grande des cordes.*

En effet, une corde quelconque AB (fig. 73) est moindre que la somme des deux rayons OA et OB, par suite, moindre qu'un diamètre.

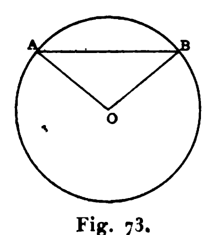


Fig. 73.

83. ***Théorème.*** — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° *Deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales ;*

2° *Deux arcs inégaux moindres qu'une demi-circonférence sont sous-tendus par des cordes inégales et le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.*

1° Si deux arcs d'une même circonférence ou de deux circonférences égales sont égaux, on pourra les faire coïncider, et alors les cordes qui les sous-tendent coïncideront aussi.

2° Soient AB et CD (fig. 74), deux arcs inégaux moindres qu'une demi-circonférence. Si nous supposons le premier plus grand que le second, nous pourrons le décomposer en deux parties, AE et EB, dont l'une AE soit égale à CD ; et

alors, comme les cordes AE et CD sont égales, il suffira de démontrer que la corde AB est plus grande que la corde AE. En effet, si l'on joint le centre O aux points A, E, B, les deux triangles AOB, AOE ont un angle inégal : AOB > AOE, compris entre côtés égaux chacun à chacun ; au plus grand angle est opposé le plus grand côté. Donc, le côté AB est plus grand que le côté AE.

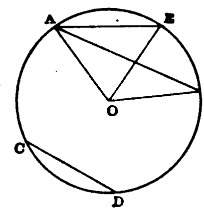


Fig. 74.

Les réciproques sont vraies [19].

Remarque. — Si l'on considère des arcs plus grands qu'une demi-circonférence, la première partie du théorème subsiste, mais il n'en est pas de même de la seconde ; au contraire, c'est le plus grand arc qui est alors soustendu par la plus petite corde.

84. ***Théorème.*** — *Le diamètre perpendiculaire à une corde divise cette corde et les deux arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales.*

En effet, soit AB (fig. 75), un diamètre perpendiculaire à une corde CD en un point E. Les rayons OC, OD sont deux obliques égales et, par suite, s'écartent également du pied de la perpendiculaire : EC = ED Donc, si on plie la figure autour du diamètre AB, ED vient coïncider avec EC et les arcs AD, BD viennent coïncider avec les arcs AC, BC.


Fig. 75.

Corollaire. — *Le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.*

Remarque. — La droite AB satisfait à cinq conditions : elle est perpendiculaire sur CD, elle passe par le centre, par le milieu de la corde CD et par les milieux des arcs sous-tendus par cette corde. Or deux de ces conditions suffisent pour déterminer une droite. Par conséquent, toute droite qui satisfait à deux des conditions précédentes satisfait nécessairement aux trois autres. Ainsi, *la droite qui joint le milieu d'une corde au centre est perpendiculaire à cette corde et divise les arcs qu'elle sous-tend en deux parties égales*, etc.

85. ***Théorème.*** — *Dans un même cercle (ou dans des cercles égaux), deux cordes égales sont également distantes du centre, et, de deux cordes inégales, la plus grande est la plus rapprochée du centre.*

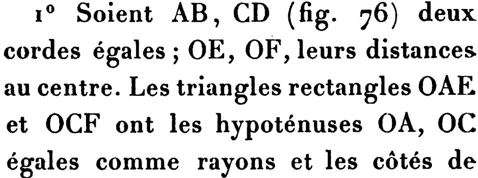
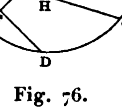



Fig. 76.

1° Soient AB, CD (fig. 76) deux cordes égales ; OE, OF, leurs distances au centre. Les triangles rectangles OAE et OCF ont les hypoténuses OA, OC égales comme rayons et les côtés de l'angle droit AE, CF sont égaux comme moitiés de cordes égales [84] ; ces deux triangles sont donc égaux ; par suite, OE $=$ OF.

2° Soient CG et AB deux cordes inégales ; OH et OE leurs distances au centre. Supposons CG $>$ AB ; il faut prouver que OH $<$ OE. En effet, les deux triangles rectangles OCH, OAE ont des hypoténuses égales et CH, qui est la moitié de CG, est plus grand que AE, qui est la moitié de AB. Donc [71] OH $<$ OE.

Les réciproques sont vraies [19].

**EXERCICES**

**1. Si on divise la corde AB d'un cercle en trois parties égales, les rayons qui passent par les points de division ne partagent pas l'arc AB en trois parties égales (p. 43, exercice 4).**

**2. On dit que deux diamètres sont conjugués quand chacun d'eux divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre. Démontrer que deux diamètres conjugués sont rectangulaires.**

**3. Les cordes obtenues en joignant un point de la circonférence aux extrémités d'un même diamètre s'appellent *supplémentaires*. Démontrer que deux cordes supplémentaires sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués. En déduire que deux cordes supplémentaires forment un angle droit.**

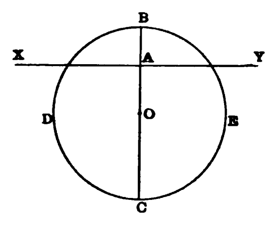
**4. La plus petite corde qui passe par un point intérieur à une circonférence est perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point.**

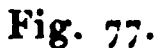
---

## CHAPITRE II

## TANGENTES ET NORMALES AU CERCLE

86. ***Théorème.*** — *Une droite* XY (fig. 77, 78, 79) *rencontre une circonférence* O *en deux points, ou en un point,*





Fig. 77.

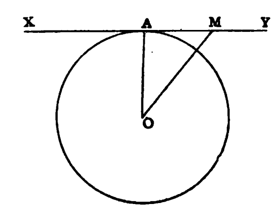



Fig. 78.

*ou ne la rencontre pas, selon que la distance* OA *de cette droite au centre du cercle est inférieure, égale ou supérieure au rayon.*

1° Si la distance OA est inférieure au rayon (fig. 77), le point A est compris entre les deux points B et C où la droite OA rencontre la circonférence, c'est-à-dire que les points B et C sont *de part et d'autre* de la droite XY. Donc chacune des deux demi-circonférences BDC, BEC rencontre la droite XY au moins en un point. Ainsi la droite XY a au moins deux points communs avec la circonférence; d'ailleurs nous savons qu'elle ne peut pas en avoir plus de deux.

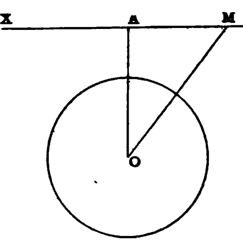


Fig. 79.

2° Si la distance OA est égale au rayon (fig. 78), le point A est sur la circonférence. Tout point M de la droite XY autre que A est extérieur au cercle, car l'oblique OM est plus grande que la perpendiculaire OA. Donc, dans ce cas, la droite XY ne rencontre la circonférence qu'en un point, le point A.

3° Si la distance OA est plus grande que le rayon (fig. 79), le point A est extérieur. Il en est de même, à plus forte raison, de tout autre point M de la droite XY, car OM > OA. Dans ce cas, la droite XY ne rencontre pas la circonférence.

Les réciproques sont vraies [19].

87. On dit qu'une droite est *sécante* à une circonférence quand elle la rencontre en deux points.

On dit qu'une droite est *tangente* à une circonférence quand elle la rencontre en un seul point. Ce point s'appelle le *point de contact*.

Enfin, quand une droite n'a aucun point commun avec

une circonférence, tous les points de la droite sont extérieurs à la circonférence et on dit que la droite est elle-même *extérieure* à la circonférence.

D'après ce qui précède, pour qu'une droite soit tangente à un cercle, il faut et il suffit que la distance du centre à la droite soit égale au rayon, c'est-à-dire que *cette droite soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.*

Soient A (fig. 80) un point d'une circonférence, AT la tangente en ce point, c'est-à-dire la perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA. Toute autre droite AX passant par A rencontre nécessairement la circonférence en un second point. D'ailleurs on peut s'en assurer en abaissant OC perpendiculaire sur AX et en prenant sur le prolongement de AC une longueur CB égale à AC; comme OB = OA, le point B est un second point commun à la circonférence et à la droite AX.

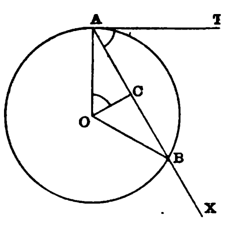


Fig. 80.

Supposons maintenant que le point B se déplace sur la circonférence, en se rapprochant indéfiniment du point A, l'angle AOB deviendra aussi petit qu'on voudra et il en sera de même, à plus forte raison, de l'angle AOC, qui est la moitié de AOB. Mais l'angle AOC est égal à l'angle BAT, car ces deux angles ont tous deux pour complément l'angle OAC. Donc, l'angle BAT diminue indéfiniment en même temps que la distance AB. Par conséquent, quand le point B viendra se confondre avec le point A, la sécante ABX viendra se confondre avec la tangente AT.

C'est cette propriété qu'on prend pour définition de la tangente à une courbe quelconque.

DÉFINITION. — **On appelle** *tangente à une courbe en un point* A (fig. 81) **la droite qui** occupe la position limite de **la droite** qui joint le point A à un autre **point** B de la courbe, quand ce second **point** se rapproche indéfiniment du premier jusqu'à se confondre avec lui.

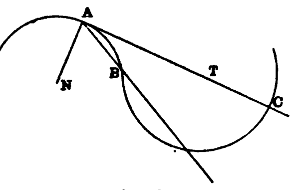


Fig. 81.

En d'autres termes, on dit qu'une droite AT est tangente à une courbe en un point A, quand l'angle qu'elle forme avec la droite qui joint le point A à un autre point B de la courbe tend vers zéro en même temps que la distance AB [1].

Rien n'empêche que la tangente AT rencontre la courbe en d'autres points que le point de contact.

88. Deux tangentes à un même cercle, menées en des points diamétralement opposés sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires au même diamètre.

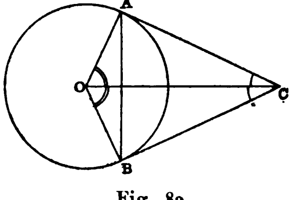


Fig. 82.

Deux tangentes, menées en des points A et B (fig. 82) non diamétralement opposés, se rencontrent, puisqu'elles sont perpendiculaires à deux droites concourantes OA et OB [43, III].

Ces tangentes jouissent de propriétés remarquables.

Soit C leur point de rencontre. Les triangles rectangles OAC, OBC sont égaux, comme ayant l'hypoté-

---

[1] On entend par là qu'à tout angle $\alpha$ on peut faire correspondre une longueur $\lambda$ telle que l'inégalité $AB < \lambda$ entraîne $\widehat{TAB} < \alpha$.

nuse commune et un côté de l'angle droit égal OA=OB. Par conséquent, CA=CB; en outre, dans les mêmes triangles, les angles en C sont égaux, ainsi que les angles en O. Par suite [55, I], la droite OC est perpendiculaire sur le milieu de AB.

Ainsi, *les tangentes issues d'un point sont égales, et la droite qui joint leur point de concours au centre est bissectrice de l'angle des tangentes et de l'angle des rayons qui aboutissent au point de contact et perpendiculaire au milieu de la corde qui joint les points de contact.*

89. On appelle *normale* en un point A d'une courbe (fig. 81) la perpendiculaire AN menée par ce point à la tangente. Ce point s'appelle le *pied* de la normale.

La normale à un cercle en un point A (fig. 82) est la droite qui joint ce point au centre du cercle.

Réciproquement, tout diamètre est normal au cercle à chacune de ses extrémités.

Fig. 83.

90. D'un point A (fig. 83) intérieur ou extérieur à un cercle O, on peut mener deux normales AB, AC, dont les pieds B et C sont les points de rencontre de la droite AO avec la circonférence.

1° Toute *oblique* AD est moindre que l'une de ces deux normales et plus grande que l'autre. Car

$$|OA - OD| < AD < OA + OD,$$

ou

$$AC < AD < AB.$$

2° Deux obliques AD, AE qui s'écartent également du pied de l'une des normales sont égales ; car si $\widehat{BD} = \widehat{BE}$, les triangles OAD, OAE sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux.

3° De deux obliques AD, AF, la plus petite est celle qui s'écarte le moins du pied B de la petite normale. Car, si $\widehat{BD} < \widehat{BF}$, les triangles OAD, OAF ont un angle inégal $\widehat{AOD} < \widehat{AOF}$, compris entre côtés égaux. Donc AD < AF.

La plus petite normale s'appelle la *distance* du point A à la circonférence.

91. **Théorème.** — *Deux parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.*

1° Soient (fig. 84) AB, CD deux sécantes parallèles qui interceptent des arcs AC et BD sur la circonférence O. Menons le diamètre EF perpendiculaire à ces cordes. On a :

$$\text{arc AF} = \text{arc BF},$$
$$\text{arc CF} = \text{arc DF} ;$$

d'où

$$\text{arc AF} - \text{arc CF} = \text{arc BF} - \text{arc DF},$$

ou

$$\text{arc AC} = \text{arc BD}.$$

2° Soient AB une corde et FH une tangente parallèle à cette corde. Le diamètre qui passe par le point de contact F est perpendiculaire à la tangente et, par suite, à la corde. Donc [84]

$$\text{arc AF} = \text{arc BF}.$$

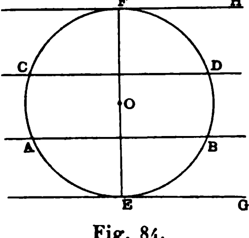


Fig. 84.

3° Soient EG, FH deux tangentes parallèles ; elles sont perpendiculaires aux extrémités d'un même diamètre. Donc les arcs EAF, EBF sont égaux comme valant chacun une demi-circonférence.

92. **Théorème.** — *Il y a quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle donné.*

Le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle ABC (fig. 85) est à une distance de chacun des côtés égale à son rayon ; il est donc équidistant de ces trois côtés. Par suite, il se trouve sur la bissectrice BX de l'angle B ou sur la bissectrice BY de l'angle extérieur ABN ; de même, il se trouve sur la bissectrice CZ de l'angle C ou sur la bissectrice CV de l'angle extérieur ACK. Or BX et CZ se coupent évidemment en un point O situé à l'intérieur du triangle ; ensuite les *demi-droites* BX et CV font avec BC des angles intérieurs dont la somme est égale à $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} + 90°$, par suite, moindre que 180° ; donc elles se coupent en un point O″ situé par rapport à BC du même côté que A, et, par conséquent, situé dans l'angle B, mais à l'extérieur du triangle. De même, BY et CZ se coupent en un point O‴ situé dans l'angle C, à l'extérieur du triangle. Enfin les *demi-droites* BY′ et CV′ opposées à BY et à CV se coupent en un point O′ situé dans l'angle A à l'extérieur du triangle. Il y a donc quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle, ayant pour centres les points O, O′, O″, O‴ et pour rayons les distances de ces quatre points à l'un des côtés.

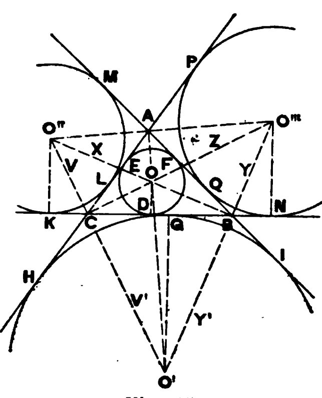


Fig. 85.

Le cercle de centre O est intérieur au triangle : on l'appelle *inscrit*. Les trois autres sont extérieurs et sont dits *exinscrits*.

Remarque. — Le point O, étant équidistant des trois

côtés et situé dans l'angle A, se trouve sur la bissectrice de cet angle; il en est de même de O'. Les deux autres points O'', O''' se trouvent sur la bissectrice de l'angle extérieur CAM. Par conséquent :

1° *Les trois bissectrices intérieures concourent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit;*

2° *Les bissectrices de deux angles extérieurs et la bissectrice intérieure du troisième angle concourent au centre de l'un des cercles exinscrits.*

93. Nous allons calculer, en fonction des côtés, les segments déterminés sur les côtés par les points de contact des cercles inscrit et exinscrits.

Désignons par $2p$ le périmètre du triangle, par $a$, $b$, $c$, les trois côtés BC, CA, AB; par D, E, F, par G, H, I, ... les points de contact de ces côtés avec les cercles O, O',... On a

$$2p = AF + AE + BF + BD + CD + CE.$$

Mais $AF = AE$, $BF = BD$, $CD = CE$ comme tangentes issues d'un même point [88]. Donc

$$2p = 2\,AF + 2\,BD + 2\,CD,$$

$$p = AF + BD + CD = AF + a.$$

D'où

$$AF = p - a.$$

De même,

$$BD = p - b, \quad CD = p - c.$$

Ensuite, on a aussi

$$2p = AB + BG + CG + CA = AB + BI + CH + CA,$$

ou

$$2p = AI + AH = 2\,AI.$$

D'où $AI = p$.

Et de même $BM = p$, $CP = p$.

On en déduit aisément

$$GD = |\,b - c\,|, \quad KN = b + c, \quad DK = b, \quad GK = c, \text{ etc.}$$

**EXERCICES**

**1. Dans un triangle rectangle, le diamètre du cercle inscrit est égal à l'excès de la somme des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse. Trouver la propriété analogue pour les cercles exinscrits.**

**2. Démontrer que, dans un cercle, toutes les cordes de même longueur sont tangentes à une même circonférence.**

**3. D'un point quelconque C pris sur un diamètre fixe AB d'un cercle O, on mène une tangente CD; trouver le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la bissectrice de l'angle ACD. — Deux droites.**

**4. Construire un triangle connnaissant trois des centres des cercles inscrit et exinscrits.**

**5. Trouver le lieu géométrique des points tels que les tangentes menées par ces points à un cercle donné fassent un angle donné. — Une circonférence.**

**6. Sur une tangente en A à un cercle O, on prend deux points B et C, par lesquels on mène les tangentes BD, CE. Prouver que les angles BOC, DAE sont égaux ou supplémentaires.**

**7. D'un point variable C d'une circonférence O, on abaisse sur un diamètre fixe AB une perpendiculaire CD et on prend sur le rayon OC un segment OM égal à CD. Trouver le lieu du point M. — Une circonférence.**

---

## CHAPITRE III

## POSITIONS RELATIVES DE DEUX CERCLES

94. ***Théorème.*** — *Par trois points* A,B,C (fig. 86), *non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence et on n'en peut faire passer qu'une.*

En effet, le centre d'une circonférence passant par A, B, C doit être équidistant des trois points A, B, C. Or le lieu des points équidistants de A et de B est la perpendiculaire DE élevée au milieu de AB ; le lieu des

points équidistants de A et de C est la perpendiculaire FG élevée au milieu de AC. Ces droites DE, FG, respectivement perpendiculaires à deux droites AB, AC qui se coupent, se coupent elles-mêmes en un point O, qui est à égale distance des trois points donnés. La circonférence décrite de O comme centre, avec OA pour rayon, passe donc par les trois points A, B, C et il n'y en a pas d'autre, puisque O est le seul point du plan équidistant des points donnés.

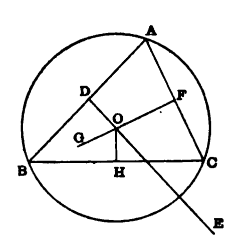


Fig. 86.

Remarque. — Le point O étant équidistant des trois points A, B, C se trouve aussi sur la perpendiculaire élevée au milieu de BC. Donc

*Les trois médiatrices d'un triangle concourent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit.*

95. Quand une circonférence passe par tous les sommets d'un polygone, on dit qu'elle est *circonscrite* au polygone, ou que le polygone est *inscrit* à la circonférence. Ainsi la circonférence qui passe par A, B, C (fig. 86) est circonscrite au triangle ABC.

De même, quand tous les côtés d'un polygone sont tangents à un cercle, on dit que le polygone est *circonscrit* au cercle, ou que le cercle est *inscrit* au polygone.

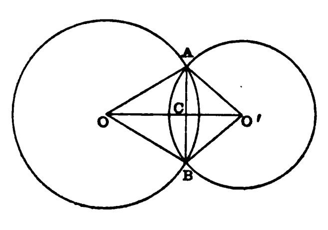


Fig. 87.

96. ***Théorème.*** — *Quand deux circonférences* O *et* O'

(fig. 87) *ont un point commun* A *hors de la ligne des centres, elles en ont un second symétrique du premier par rapport à cette ligne.*

Soit B le symétrique de A par rapport à OO′. On a OA = OB, O′A = O′B, comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire; donc le point B appartient aux deux circonférences.

97. ***Théorème***. — *Quand deux circonférences* O *et* O′ (fig. 87) *ont deux points communs* A *et* B, *ces deux points sont symétriques par rapport à la ligne des centres.*

En effet, les points O et O′ étant équidistants de A et de B, la droite OO′ est perpendiculaire sur le milieu de AB.

98. Définition. — On dit que deux courbes sont *tangentes en un point* quand elles passent par ce point et qu'elles ont même tangente en ce point.

99. ***Théorème***. — *Quand deux circonférences* O *et* O′ (fig. 88) *sont tangentes en un point* A, *ce point est sur la ligne des centres et les circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point* A. *Et réciproquement.*

En effet, la tangente commune AT est perpendiculaire aux rayons OA, O′A. Donc ces rayons sont en ligne droite et le point A est sur la droite OO′. Les circonférences n'ont pas d'autre point commun; car, si elles avaient un second point commun, ce second point serait symétrique de A par rapport à OO′ [97] et, par suite, se confondrait avec A.

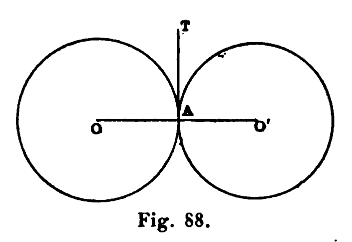


Fig. 88.

Réciproquement, si les circonférences n'ont pas d'autre point commun que le point A, ce point doit se trouver sur OO′, sans quoi les deux circonférences auraient un second point commun [96]. Mais alors la perpendiculaire à OO′ menée par A est à la fois tangente aux deux circonférences; donc ces circonférences sont tangentes.

On dit qu'elles sont tangentes *extérieurement* ou *intérieurement* selon que tous les points de l'une, autres que le point de contact, sont extérieurs (fig. 90) ou intérieurs (fig. 92) à l'autre.

100. Nous savons [94] que deux circonférences qui ont trois points communs coïncident. Donc deux circonférences distinctes ne peuvent présenter que *cinq* positions relatives: ou bien elles ont deux points communs et alors on dit qu'elles sont *sécantes;* ou bien elles ont un seul point commun et alors elles sont *tangentes* extérieurement ou intérieurement; ou, enfin, elles n'ont aucun point commun et alors elles sont *extérieures* l'une à l'autre, ou l'une est *intérieure* à l'autre.

***Théorèmes.*** — 1° *Quand deux circonférences sont* extérieures, *la distance des centres est plus grande que la somme des rayons ;*

2° *Quand deux circonférences sont* tangentes extérieurement, *la distance des centres est égale à la somme des rayons ;*

3° *Quand deux circonférences sont* sécantes, *la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence ;*

4° *Quand deux circonférences sont* tangentes intérieurement, *la distance des centres est égale à la différence des rayons ;*

5° *Quand deux circonférences sont* intérieures *l'une à l'autre, la distance des centres est moindre que la différence des rayons.*

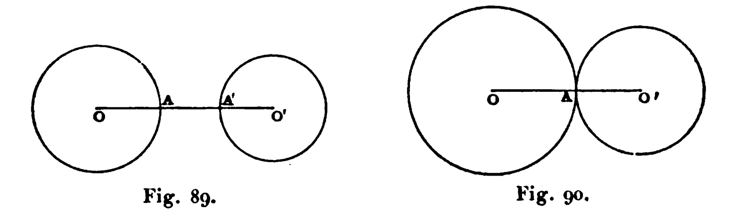



Fig. 89. Fig. 90.

1° Soient O, O' (fig. 89) deux circonférences extérieures ; A et A' les points de ces deux circonférences situés sur OO'. Le point A' est entre A et O' ; donc

$$OO' = OA + AA' + A'O',$$

d'où

$$OO' > OA + O'A'.$$

2° Si les deux circonférences sont tangentes extérieurement en A (fig. 90), ce point A est sur OO'. Donc

$$OO' = OA + O'A.$$

3° Si les deux circonférences se coupent en deux points M et N (fig. 91), ces deux points sont symétriques par rapport à OO' et, par suite, en dehors de OO', sans quoi ils se confondraient. Donc, dans le triangle OMO', le côté OO' est moindre que la somme des rayons OM, O'M et plus grand que leur différence.

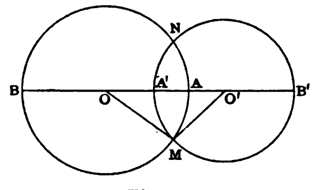



Fig. 91.

4° Si les deux circonférences sont tangentes intérieurement en A (fig. 92), ce point A est sur le prolongement de OO'. Donc

$$OO' = OA - O'A.$$

5° Si la circonférence O′ est intérieure à la circonférence O (fig. 93), en appelant A′ et A les points de ces deux circonférences situés sur le prolongement de OO′, le point A′ est entre O′ et A; donc

$$OO' = OA - O'A' - AA',$$

d'où

$$OO' < OA - O'A'.$$

Fig. 92.

Il peut arriver que les deux circonférences aient même centre ; on dit alors qu'elles sont *concentriques*. Dans ce cas, la distance des centres est nulle; elle est donc encore moindre que la différence des rayons.

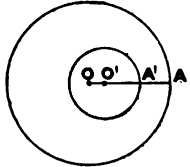


Fig. 93.

Les réciproques sont vraies [19].

101. En particulier, *pour que deux cercles se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence* ; c'est-à-dire que, en désignant par $d$ la distance des centres et par $r$, $r'$ les rayons, on doit avoir

$$d < r + r', \quad d > |r - r'|;$$

ou, ce qui revient au même,

$$d < r + r', \quad r < d + r', \quad r' < d + r.$$

Il est facile de vérifier que ces conditions sont *suffisantes*. En effet, soient (fig. 91) A et B, A′ et B′ les points de rencontre de OO′ avec les deux circonférences, le point B étant sur le prolongement de OO′ du côté de O et le point B′ sur le prolongement de OO′ du côté de O′. La

condition $r' < d + r$, ou $r' < O'B$ exprime que le point B est *extérieur* au cercle O'; les deux autres expriment que $r'$ est plus grand que la différence entre $d$ et $r$, ou que $r' > O'A$; donc le point A est *intérieur* au cercle O'. Donc, le point A étant intérieur et le point B extérieur, chacune des demi-circonférences AB coupe la circonférence O'.

Cas particulier. — Si $r = r'$, la condition $d > |r - r'|$ est vérifiée; reste la condition $d < r + r'$, ou $d < 2r$, ou $r > \frac{d}{2}$.

Donc, *pour que deux cercles égaux se coupent, il faut et il suffit que leur rayon soit plus grand que la moitié de la distance des centres.*

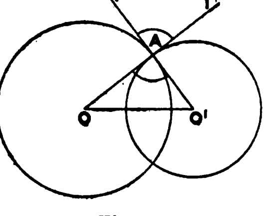


Fig. 94.

102. On appelle *angle de deux courbes* qui se coupent en un point l'angle formé par les tangentes à ces deux courbes en ce point.

On dit que les deux courbes sont *orthogonales* si leur angle est droit. Soient O et O' (fig. 94), deux cercles qui se coupent orthogonalement en A. Les tangentes AT et AT' sont rectangulaires; donc elles sont dans le prolongement des rayons O'A, OA. Ainsi,

*Les rayons qui aboutissent à l'un des points d'intersection de deux cercles orthogonaux sont tangents à ces deux cercles et forment un angle droit. Et réciproquement.*

EXERCICES

1. Les trois hauteurs d'un triangle ABC (fig. 95) concourent en un même point, qu'on appelle l'*orthocentre* du triangle. Car, en menant par A, B, C des parallèles aux côtés BC, CA, AB, on forme un second triangle A'B'C', dans lequel A, B, C sont les milieux

des côtés ; car AB′ = BC = AC′,... Donc les hauteurs du triangle ABC sont les médiatrices du triangle A′B′C′. Donc elles concourent en un même point.

*Autre démonstration, indépendante du postulatum d'Euclide.* Soit H (fig. 96), le point de concours des hauteurs BE, CF. Menons deux droites FD, ED respectivement symétriques de EF par rapport à CF et à BE, de sorte que BE et CF sont bissectrices intérieures du triangle DEF ; donc AB et AC, qui leur sont perpendiculaires,

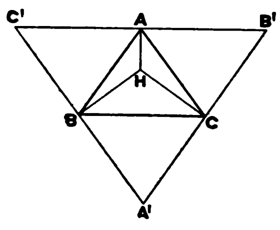


Fig. 95.

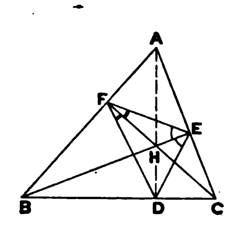


Fig. 96.

sont bissectrices extérieures. Les points A, B, C, H sont équidistants des trois côtés du triangle DEF. On en conclut aisément que la troisième bissectrice intérieure DH passe par A et est perpendiculaire sur DB et sur DC.

Le triangle DEF, qui a pour sommets les pieds des trois hauteurs, s'appelle le triangle *pédal* du triangle ABC. Il résulte de la démonstration précédente que *les trois hauteurs du triangle* ABC *sont les bissectrices du triangle pédal* DEF.

2. On peut mener à deux circonférences quatre normales communes, qui ont pour extrémités les points de rencontre de ces circonférences avec la droite des centres. Montrer que la distance de deux points quelconques de ces deux circonférences est toujours moindre que la plus grande des quatre normales et qu'elle est plus grande que la plus petite si les circonférences sont extérieures ou intérieures.

3. Etant donnés dans un plan quatre points non en ligne droite, tracer une circonférence équidistante de ces quatre points. Combien y a-t-il de solutions ?

4. On donne quatre points A, B, C, D. Construire un cercle passant par A et B et tel que les tangentes issues des points C et D soient égales.

5. Quand trois cercles sont tangents deux à deux, les trois tangentes communes concourent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit au triangle ayant pour sommets les centres des trois cercles.

6. Trouver le lieu géométrique des centres des cercles qui coupent à angle droit une série de cercles tangents en un même point. — C'est la tangente commune à tous ces cercles.

7. Quel est le lieu des points de contact de deux circonférences tangentes entre elles et tangentes à une même droite ou à une même circonférence en des points donnés ? — Une circonférence.

---

## CHAPITRE IV

## MESURE DES ANGLES

103. On appelle *rapport* d'une grandeur A à une autre grandeur B de même espèce et on désigne par $\frac{A}{B}$ le nombre par lequel il faut multiplier B pour avoir un produit égal à A.

Par exemple, dire que $\frac{A}{B} = \frac{5}{3}$, c'est dire que $A = B \times \frac{5}{3}$ ou que A est les $\frac{5}{3}$ de B.

Le rapport de deux grandeurs est un nombre rationnel ou irrationnel [1].

Soient A et B deux grandeurs de même espèce, A′ et B′ deux autres grandeurs d'une même espèce, différente ou non de la première; dans le cas où les rapports $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ sont irrationnels, ces deux rapports sont égaux lorsque, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences

$$A - \frac{m}{n}B, \quad A' - \frac{m}{n}B'$$

sont *de même signe :* nous entendons par là que A est

[1] Voir la note sur la mesure des grandeurs.

inférieur ou supérieur à $\frac{m}{n}$ B selon que A′ est lui-même inférieur ou supérieur à $\frac{m}{n}$ B′.

104. ***Théorème.*** — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, le rapport de deux angles au centre* AOB, A′O′B′ (fig. 97) *est égal au rapport des arcs* AB, A′B′ *compris entre leurs côtés.*

1° Supposons que le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ soit un nombre rationnel ; par exemple :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{5}{3}.$$

Cela veut dire que AB est les $\frac{5}{3}$ de A′B′, c'est-à-dire que, si l'on partage A′B′ en trois parties égales, AB contiendra cinq de ces parties. Joignons les points de division au centre, l'angle A′O′B′ sera partagé en trois angles partiels et l'angle AOB en cinq ; ces huit angles sont égaux comme angles au centre interceptant des arcs égaux.

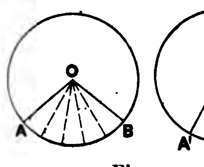


Fig. 97.

Donc

$$AOB = \frac{5}{3} A'O'B',$$

ou

$$\frac{AOB}{A'O'B'} = \frac{5}{3} = \frac{AB}{A'B'}.$$

2° Supposons maintenant que le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ soit un nombre irrationnel, et soit $\frac{m}{n}$ une fraction telle que

$$AB > \frac{m}{n} A'B'.$$

Cela veut dire que, si l'on partage A′B′ en $n$ parties égales et

qu'on prenne, à partir du point A, dans le sens de l'arc AB, $m$ arcs successifs égaux chacun à $\frac{1}{n}$ A'B', la somme de ces $m$ arcs sera moindre que AB; et alors, en joignant les points de division au centre, on voit que l'angle AOB sera plus grand que la somme de $m$ angles égaux chacun à $\frac{1}{n}$ A'O'B'.

Donc

$$\text{AOB} > \frac{m}{n}\,\text{A'O'B'}.$$

On prouve de même que l'inégalité $\text{AB} < \frac{m}{n}\,\text{A'B'}$ entraîne $\text{AOB} < \frac{m}{n}\,\text{A'O'B'}$. Par conséquent [103] ;

$$\frac{\text{AOB}}{\text{A'O'B'}} = \frac{\text{AB}}{\text{A'B'}}.$$

105. On appelle *mesure* d'une grandeur le rapport de cette grandeur à une autre grandeur de même espèce prise pour unité.

***Théorème.*** — *Dans une même circonférence, ou dans des circonférences égales, si l'on prend pour unité d'angle un angle au centre arbitraire et pour unité d'arc l'arc compris entre ses côtés, la mesure d'un angle au centre quelconque sera exprimée par le même nombre que la mesure de l'arc compris entre ses côtés.*

En effet, supposons que A'O'B' (fig. 97) soit l'unité d'angle et A'B' l'unité d'arc; on a

$$\frac{\text{AOB}}{\text{A'O'B'}} = \frac{\text{AB}}{\text{A'B'}},$$

c'est-à-dire :

Mesure de l'angle AOB = mesure de l'arc AB.

Pour abréger, on énonce ce théorème de la manière suivante :

*Un angle au centre a pour mesure l'*arc *compris entre ses côtés.*

Mais alors il ne faut pas perdre de vue que le mot **arc veut dire** : *nombre qui mesure l'arc.*

REMARQUE. — Un angle **droit a pour** mesure un quadrant [32].

106. On appelle angle *inscrit* un angle formé par deux cordes partant d'un même point de la circonférence.

***Théorème.*** — *Un angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Considérons d'abord un angle inscrit BAC, (fig. 98) dont un côté AB passe par le centre. Menons le rayon OC. Dans le triangle isoscèle AOC, l'angle extérieur BOC est double de l'angle intérieur non adjacent OAC. Or BOC a pour mesure l'arc BC, donc OAC a pour mesure la moitié de cet arc.

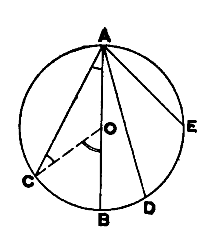


Fig. 98.

Soit maintenant un angle inscrit CAD dont les côtés sont de part et d'autre du centre. Menons le diamètre AB. Les angles BAC, BAD ont pour mesures $\frac{BC}{2}$, $\frac{BD}{2}$ ; donc leur somme CAD a pour mesure $\frac{BC}{2}+\frac{BD}{2}$ ou $\frac{CD}{2}$.

Considérons enfin un angle inscrit DAE dont les côtés sont d'un même côté du centre. Cet angle étant la différence des angles BAE, BAD a pour mesure $\frac{BE}{2}-\frac{BD}{2}$ ou $\frac{DE}{2}$.

COROLLAIRES. — I. — *Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit, et réciproquement.*

II. — Un angle *exinscrit* BAC (fig. 99), dont le sommet est sur la circonférence et qui est formé par une corde AB et par le prolongement d'une autre corde AD a pour mesure la demi-somme des arcs AB et AD ; car il est égal à la somme des angles inscrits ABD, ADB.

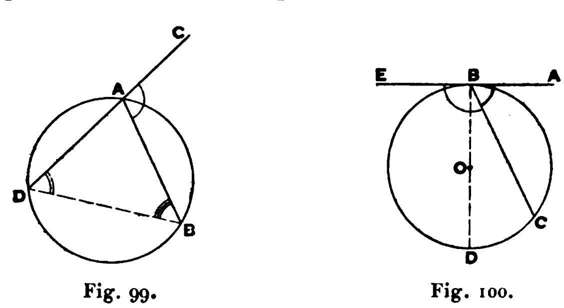



Fig. 99. Fig. 100.

107. ***Théorème.*** — *Un angle* ABC (fig. 100), *formé par une tangente* AB *et une corde* BC *menée par le point de contact, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Supposons que l'angle ABC soit aigu et menons le diamètre BD. L'angle droit ABD a pour mesure un quadrant, c'est-à-dire la moitié de la demi-circonférence BCD ; l'angle inscrit CBD a pour mesure $\frac{\text{CD}}{2}$; donc l'angle ABC, qui qui est égal à ABD — CBD, a pour mesure $\frac{\text{BCD}}{2} - \frac{\text{CD}}{2}$ ou $\frac{\text{BC}}{2}$.

On prouverait de même que l'angle obtus EBC a pour mesure la moitié de l'arc BDC.

108. On appelle *segment* la portion de cercle comprise entre un arc AMB (fig. 101) et sa corde AB.

Tous les angles ACB, ADB,... inscrits dans ce segment sont égaux ; car ils ont même mesure. Soit $\alpha$ leur

valeur commune : on dit que le segment est *capable* de l'angle $\alpha$.

Fig. 101.

L'angle ABT formé par AB et par la tangente en B est aussi égal à $\alpha$.

Soit E un point intérieur au segment; l'angle AEB est plus grand que $\alpha$. Car, en appelant D le point de rencontre de AE avec l'arc AMB, on a $\widehat{AEB} > \widehat{ADB}$.

Au contraire, soit F un point extérieur au segment et situé par rapport à AB du même côté que ce segment, l'angle AFB est moindre que $\alpha$. Car, soient H un point de la portion de droite AB et D le point de rencontre de HF avec l'arc AMB (1), on a $\widehat{AFB} < \widehat{ADB}$.

Par conséquent, *l'arc* AMB *est le lieu géométrique des points situés par rapport à* AB *du même côté que* M *d'où l'on voit* AB *sous l'angle* $\alpha$.

De même, le lieu des points situés de l'autre côté de AB d'où l'on voit AB sous le même angle $\alpha$ est un arc ANB symétrique à AMB par rapport à AB. Par conséquent,

*Le lieu de tous les points du plan d'où l'on voit une droite* AB *sous un angle donné se compose de deux arcs de cercles passant par* A *et* B *et symétriques par rapport à* AB.

109. ***Théorème.*** — *L'angle* AEC *formé par deux*

---

(1) Il peut arriver que les côtés de l'angle AFB ne rencontrent pas l'arc AMB; c'est pourquoi nous avons recours au point H.

*cordes* AB, CD (fig. 102) *qui se coupent à l'intérieur du cercle, a pour mesure la demi-somme des arcs* AC, BD *compris entre les côtés de cet angle et leurs prolongements.*

Car cet angle est la somme des deux angles inscrits EBC et ECB.

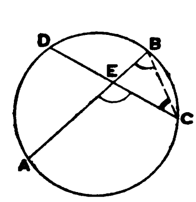



Fig. 102.

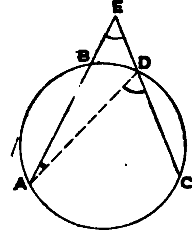



Fig. 103.

110. **Théorème.** — *L'angle* AEC (fig. 103), *formé par deux sécantes qui se coupent à l'extérieur du cercle, a pour mesure la demi-différence des arcs* AC, BD *compris entre ses côtés.*

Car cet angle est la différence des angles inscrits ADC et BAD.

Il en est de même de l'angle AEF (fig. 104), formé par une sécante et une tangente, et de l'angle FEG formé par deux tangentes. Car

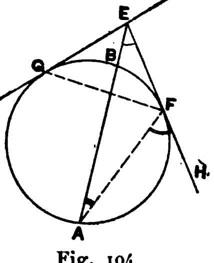



Fig. 104.

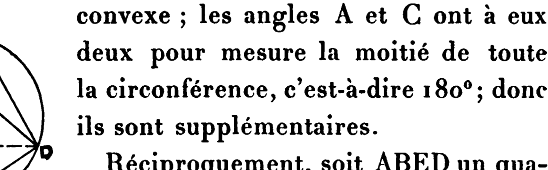
$$\widehat{AEF} = \widehat{AFH} - \widehat{EAF} \text{ et } \widehat{FEG} = \widehat{GFH} - \widehat{EGF}.$$

Enfin, l'angle *exc ir conscrit* FEK, qui est la somme des angles EFG et EGF, a pour mesure l'arc FG.

## QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE

111. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère convexe inscrit à un cercle, les angles opposés sont supplémentaires. Et réciproquement.*

En effet, soit ABCD (fig. 105), un quadrilatère inscrit convexe ; les angles A et C ont à eux deux pour mesure la moitié de toute la circonférence, c'est-à-dire 180° ; donc ils sont supplémentaires.



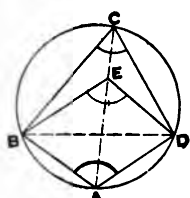



Fig. 105.

Réciproquement, soit ABED un quadrilatère convexe dans lequel les angles A et E sont supplémentaires. Par les trois points A, B, D, faisons passer une circonférence, qui rencontrera la diagonale AE en un point C, situé par rapport à BD du même côté que E. L'angle BCD est supplémentaire de l'angle BAD, par suite égal à BED. Il en résulte que le point E doit se confondre avec le point C ; car, autrement, l'angle BED serait plus grand ou plus petit que l'angle BCD [60,I]. Donc le quadrilatère ABED est inscriptible à un cercle.

112. Remarque. — Quand on considère quatre points A, B, C, D d'une même circonférence, il arrive le plus souvent

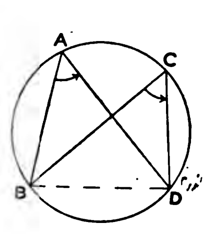



Fig. 106.

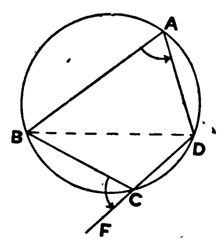



Fig. 107.

qu'on ne sait pas si les points A et C sont ou non de part et d'autre de BD ; mais, dans tous les cas, on a

$$(AB,AD) = (CB,CD).$$

En effet, supposons, pour fixer les idées, que le sens direct de rotation soit choisi de façon que l'angle (AB, AD) soit l'angle BAD. Alors, si les points A et C sont d'un même côté de BD

(fig. 106), l'angle (CB, CD) sera aussi égal à BCD, par suite, égal à BAD; si A et C sont de part et d'autre de BD (fig. 107), l'angle (CB, CD) sera supplémentaire de BCD, par suite, égal à BAD. Donc, dans les deux cas, les angles (AB, AD) et (CB, CD) sont égaux.

113. On prouve de même que, si l'on considère trois points A, B, C (fig. 108) d'une circonférence et la tangente CD au point C, on a, dans tous les cas,

$$(AB, AC) = (CB, CD).$$

*Réciproquement*, étant donnés trois points A, B, C et une droite CD passant par C, si

$$(AB, AC) = (CB, CD),$$

la tangente en C au cercle passant par A, B, C se confond avec CD. En effet, soit CE cette tangente ; l'angle (CB, CE) est égal à (AB, AC), par suite, égal à (CB, CD). Donc les droites CD et CE coïncident.

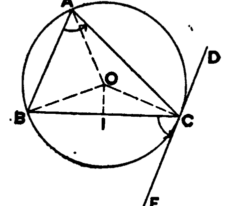


Fig. 108.

Par conséquent, étant donnés, dans un plan orienté, deux points B et C et un angle $\alpha$, *le lieu des points* A *tels que l'angle* (AB, AC) *soit égal à* $\alpha$, *est* **toute** *la circonférence passant par* B *et* C *et tangente à la droite qui passe par* C *et fait avec* BC *un angle égal à* $\alpha$.

Il en résulte immédiatement que, si l'on a quatre points A, B, C, D tels que

$$(AB, AD) = (CB, CD),$$

ces quatre points sont sur un même cercle.

D'où ces deux théorèmes :

*La condition nécessaire et suffisante pour que quatre points* A, B, C, D (fig. 106 et 107) *soient sur un même cercle, c'est que*

$$(AB, AD) = (CB, CD).$$

*La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle qui*

*passe par trois points* A, B, C (fig. 108) *soit tangent à une droite* CD *passant par* C, *c'est que*

$$(AB, AC) = (CB, CD).$$

EXERCICES

1. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et DE la tangente en C (fig. 108) ; démontrer directement que

$$(AB, AC) = \frac{1}{2}(\overline{OB}, \overline{OC}) = (BC, DE).$$

La première égalité est une conséquence des suivantes :

$$(\overline{OB}, \overline{AB}) + (\overline{AB}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{OC}) = (\overline{OB}, \overline{OC}) + 360\,k.$$

$$(\overline{OB}, \overline{AB}) + (\overline{AC}, \overline{OC}) = (\overline{AB}, \overline{AO}) + (\overline{AO}, \overline{AC}) = (\overline{AB}, \overline{AC}) + 360\,k.$$

Pour démontrer la seconde, on abaisse OI perpendiculaire sur BC et on remarque que (BC, DE) = (OI, OC) [47].

2. Soient A et B les points d'intersection de deux circonférences; on mène par A deux sécantes ACC', ADD'. Démontrer que les cordes CD, C'D' se coupent sous un angle constant et que

$$(BC, BC') = (BD, BD').$$

3. Par chacun des points communs à deux cercles qui se coupent, on mène une sécante ; prouver que les droites qui joignent les extrémités de ces deux sécantes sont parallèles.

Voir *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 2e année, p. 73 et 133.

En particulier, si par le point de contact de deux cercles tangents on mène deux sécantes, les droites qui joignent leurs extrémités sont parallèles.

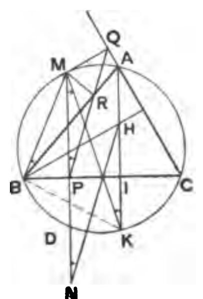


Fig. 109.

4. Les trois circonférences décrites sur les côtés d'un triangle comme diamètres se coupent deux à deux sur les côtés du triangle.

5. Par chacun des sommets d'un triangle et les milieux des côtés adjacents, on mène une circonférence. Prouver que les trois circonférences ainsi obtenues se coupent en un même point.

6. Soit H (fig. 109) l'orthocentre d'un triangle ABC inscrit à un cercle ; démontrer que le second point K d'intersection de la hauteur AH avec la circonférence est symétrique de H par rapport à BC.

7. Soit M (fig. 109) un point de la circonférence circonscrite à un triangle ABC; les pieds P, Q, R des perpendiculaires abaissées de M sur les côtés BC, CA, AB sont sur une même droite qu'on appelle la *droite de Simson;* et réciproquement.

En effet dans les quadrilatères inscriptibles MQAR, MACB, MQCP, on a

$$(MQ, QR) = (MA, AR) = (MA, AB) = (MC, CB)$$
$$= (MC, CP) = (MQ, QP).$$

Donc, les angles (MQ, QR), (MQ, QP) étant égaux, les droites QR et QP coïncident [1].

Voici une autre démonstration qui prouve que les points P, Q, R sont sur une droite équidistante de M et de l'orthocentre H. Soit N le symétrique de M par rapport à BC. On sait (Ex. 6) que la hauteur AH rencontre le cercle en un point K symétrique de H par rapport à BC. Donc

$$(NH, MN) = (MN, MK), \text{ comme symétriques.}$$

En outre [46],

$$(MN, MK) = (KA, KM).$$

Or, dans les quadrilatères inscriptibles MBKA, MBPR,

$$(KA, KM) = (BA, BM) = (BR, BM) = (PR, PM).$$

Donc, les angles (NH, MN) et (PR, PM) étant égaux, PR est parallèle à NH. On prouverait de même que PQ est parallèle à NH. Donc PR et PQ coïncident.

8. Par un point M de la circonférence circonscrite au triangle ABC (fig. 109), on mène une perpendiculaire au côté BC, qui rencontre la circonférence en D. Prouver que AD est parallèle à la droite de Simson PQR du point M.

En déduire que les droites de Simson de deux points diamétralement opposés sont rectangulaires.

9. Lieu des milieux des cordes interceptées par un cercle sur les sécantes issues d'un point donné. — Une circonférence.

10. Etant donné un triangle ABC rectangle en A, on mène à l'hypoténuse une perpendiculaire quelconque, qui rencontre AB en D et AC en E, puis on mène les droites BE et CD : quel est le lieu du point de rencontre de ces deux droites? — Une circonférence de diamètre BC.

11. Etant donnés un point O et deux droites $\Delta, \Delta'$, un angle constant XOX' pivote autour du point O ; soient A le point de ren-

---

[1] Voir *Planimétrie* de Baltzer, p. 46.

contre de OX avec $\Delta$, et A' celui de OX' avec $\Delta'$. Quel est le lieu de la projection de O sur AA' ? — Une circonférence en général; une droite si les angles (OX,OX'), ($\Delta$, $\Delta'$) sont égaux (Ex. 7).

12. Etant donnés un point F et une droite $\Delta$, on prend sur cette droite un point quelconque M, par lequel on mène une droite MN faisant avec MF un angle constant. Quel est le lieu de la projection de F sur MN ? — Une droite.

13. Etant donné un triangle ABC, on mène par A une droite quelconque, sur laquelle on projette les points B et C en B' et C'. Quel est le lieu du milieu de B'C' ? — Une circonférence.

14. Etant donnés deux cercles O et O' qui se coupent en A et B, soient C et C' les points diamétralement opposés à A :

1° Les trois points B, C, C' sont en ligne droite.

2° Si on mène par A une sécante rencontrant les deux cercles en M et M', le lieu du milieu de MM' est un cercle passant par A et B et ayant pour centre le milieu de OO'. — Car M et M' sont les projections de C et de C' sur la sécante, etc.

15. Soient A, B, C, A', B', C' six points d'une même circonférence; $A_1$ le point de rencontre de BC' avec CB'; $B_1$ celui de CA' avec AC'; $C_1$ celui de AB' avec BA'. Prouver que les cercles circonscrits aux trois triangles $BCA_1$, $CAB_1$, $ABC_1$, passent par un même point D; en déduire que les trois points $A_1$, $B_1$, $C_1$ sont en ligne droite (théorème de Pascal). Cette démonstration du célèbre théorème de l'hexagramme de Pascal est remarquable en ce qu'elle est indépendante de toute considération métrique.

Les trois cercles $B'C'A_1$, $C'A'B_1$, $A'B'C_1$ passent aussi par un même point D'; prouver que les points D, D' sont équidistants du centre du cercle donné.

Voir B. M. E., 2e année, p. 264.

---

## CHAPITRE V

## CONSTRUCTIONS

114. — On ne considère en géométrie que les constructions qui peuvent se faire *avec la règle et le compas*. Néanmoins nous admettrons aussi l'*équerre* pour le tracé des perpendiculaires et des parallèles.

Pour évaluer la simplicité et l'exactitude d'une construction,

nous adopterons les notations suivantes, qui sont dues à M. E. Lemoine.

Op. ($R_1$) désigne l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point; donc, spéculativement :

Op. ($2R_1$), c'est faire passer le bord de la règle par deux points.

Op. ($2R'_1$), c'est faire passer le bord de l'équerre par deux points ou le mettre en coïncidence avec une ligne déjà tracée. C'est de même par op. ($2R'_1$) qu'on désigne l'opération qui consiste à mettre le bord de la règle en coïncidence avec une ligne déjà tracée, si la suite de cette opération de préparation *comporte l'emploi de l'équerre*.

Op. (E), c'est faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce qu'elle passe par un point donné.

Op. ($C_1$), c'est mettre une pointe du compas en un point donné; donc, spéculativement, prendre dans le compas une longueur donnée, c'est op. ($2C_1$).

Op. ($C_2$), c'est mettre une pointe du compas en un point *indéterminé* d'une ligne.

Op. ($R_2$), c'est tracer une droite.

Op. ($C_3$), c'est tracer un cercle.

Ainsi, une construction quelconque sera représentée par le symbole

$$\text{Op.}(aR_1 + bR'_1 + cE + dC_1 + eC_2 + fR_2 + gC_3),$$

$a$, $b$,... désignant des nombres entiers.

La *simplicité* d'une construction est en raison inverse du nombre total $a + b + c + d + e + f + g$ des opérations élémentaires; c'est pourquoi nous appellerons ce nombre *le coefficient de simplicité*.

Au contraire, *l'exactitude* ne dépend que du nombre $a + b + c + d + e$ des opérations de préparation; c'est pourquoi nous appellerons ce nombre *le coefficient d'exactitude*.

115. Problème. — *Mener une perpendiculaire au milieu d'une droite* AB (fig. 110) *et, par suite, trouver le milieu de cette droite.*

Du point A comme centre avec une ouverture de compas plus grande que la moitié de AB, décrivons deux arcs de cercle, de part et d'autre de AB :

$$Op.(C_1 + C_3).$$

Fig. 110.

De B comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivons deux arcs de cercle qui coupent les précédents en deux points C et D :

$$Op.(C_1 + C_3).$$

Faisons passer le bord de la règle par C et D :

$$Op.(2R_1).$$

Enfin traçons CD :

$$Op.(R_2).$$

CD est la droite demandée [64 corollaire] et le point O où elle rencontre AB est le milieu de AB.

La construction a pour symbole total :

$$Op.(2R_1 + 2C_1 + R_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 7. Exactitude : 4 ; 1 droite, 2 cercles.

Remarque. — Pour être sûr d'avoir une ouverture de compas plus grande que la *moitié* de AB, il n'y a qu'à marquer sur AB un point quelconque E et à prendre la plus grande des deux parties AE, BE.

116. Problème. — *Mener par un point* A *une perpendiculaire à une droite* BC.

1° *Le point* A *est sur la droite donnée* BC (fig. 111).

De A comme centre avec un rayon quelconque, décrivons un cercle qui coupe la droite BC en D et E :

$$\text{Op.}(C_1 + C_3).$$

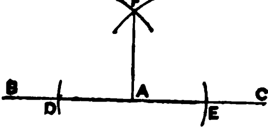


Fig. 111.

De D et E comme centres, avec un rayon plus grand que AD, décrivons deux cercles qui se coupent en F :

$$\text{Op.}(2C_1 + 2C_3).$$

Traçons AF, qui est la droite demandée [56] :

$$\text{Op.}(2R_1 + R_2).$$

La construction a pour symbole

$$\text{Op.}(2R_1 + 3C_1 + R_2 + 3C_3). \text{ Simplicité : 9. Exactitude : 5.}$$

2° *Le point* A *est à l'extrémité de la droite* BC (fig. 112).

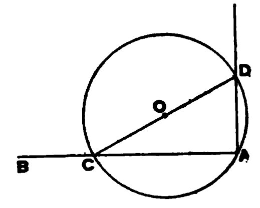


Fig. 112.

D'un point O quelconque (¹) avec OA pour rayon décrivons un cercle qui coupe la droite BC en un second point C :

$$\text{Op.}(C_1 + C_3).$$

Menons CO, qui rencontre le cercle en un second point D :

$$\text{Op.}(2R_1 + R_2).$$

Traçons AD :

$$\text{Op.}(2R_1 + R_2).$$

---

(¹) Il n'y a pas lieu de compter pour une opération l'action de piquer une pointe du compas en un point quelconque O du plan.

C'est la perpendiculaire demandée, car l'angle CAD est droit, comme inscrit dans un demi-cercle.

La construction a pour symbole total :

Op. ($4R_1 + C_1 + 2R_2 + C_3$). Simplicité : 8. Exactitude : 5.

3° *Le point* A *est hors de la droite* BC (fig. 113).

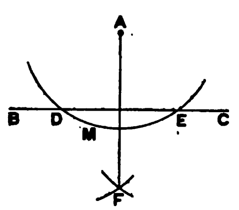


Fig. 113.

Mettons une pointe du compas en A et l'autre en M *de l'autre côté de* BC; puis décrivons un cercle, de centre A et de rayon AM, qui coupe BC en deux points D et E; puis, de D et E comme centres, avec une même ouverture de compas, décrivons deux cercles qui se coupent en F. AF est la droite demandée [64 corollaire].

Op. ($2R_1 + 3C_1 + R_2 + 3C_3$). Simplicité : 9. Exactitude : 5.

*Autrement.* De deux points quelconques D et E (fig. 114) pris sur BC, avec DA et EA pour rayons, décrivons deux cercles qui se coupent en A et F : AF est la droite demandée.

Op.($2R_1 + 2C_1 + 2C_2 + R_2 + 2C_3$).
Simplicité : 9. Exactitude : 6.

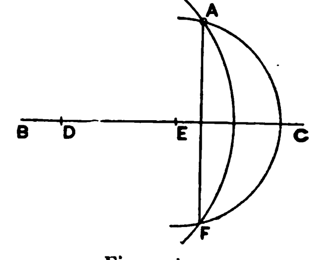


Fig. 114.

Cette dernière construction s'applique même dans le cas où le pied de la perpendiculaire tombe près de l'extrémité de la droite BC.

Remarque. — La possibilité des constructions précédentes [115, 116] suffit à prouver que toute portion de droite a un milieu et que, par un point donné, on peut toujours mener une perpendiculaire à une droite donnée.

117. *Tracé de la perpendiculaire au moyen de l'équerre* (fig. 115). — Que le point A soit ou non sur la droite BC, on place le côté DE de l'angle droit de l'équerre sur BC :

Op.($2R'_1$).

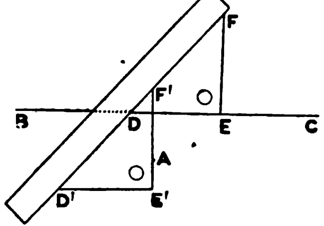


Fig. 115.

Puis on applique la règle contre le grand côté DF de l'équerre et on fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le côté EF passe par A :

Op.(E).

Enfin, on trace E'F' :

Op.($R_2$).

C'est la perpendiculaire demandée ; car, à cause de l'égalité des angles F et F', E'F' est parallèle à EF :

Op. ($2R'_1 + E + R_2$). Simplicité : 4. Exactitude : 3.

118. Problème. — *Mener par un point* A *une parallèle à une droite* BC (fig. 116).

1° Décrivons un arc de cercle DE de centre A qui coupe BC en D ; de D comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivons un cercle AF, qui coupe BC en F ; prenons avec le compas la longueur AF et, avec cette longueur pour rayon, décrivons du point D comme centre un cercle qui coupe le cercle DE en G. Enfin traçons AG, qui est la parallèle

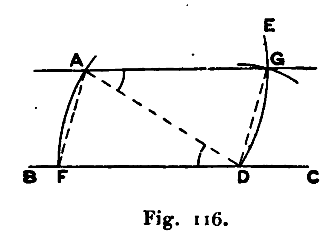


Fig. 116.

cherchée ; car les angles alternes internes ADF, DAG sont égaux, à cause de l'égalité des triangles ADF, DAG, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

Op. ($2R_1 + 5C_1 + R_2 + 3C_3$). Simplicité : 11. Exactitude : 7.

2° Décrivons un cercle quelconque (fig. 117) passant par A et coupant BC en D et E ; puis, de E comme

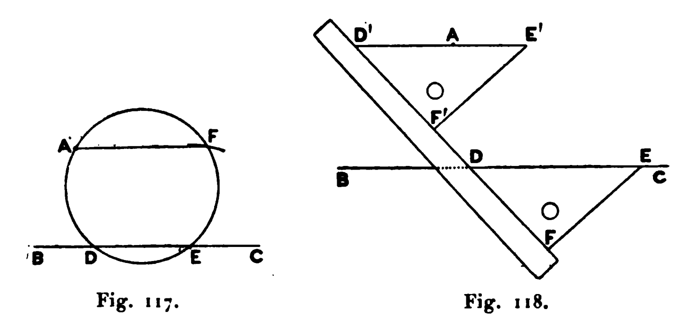



Fig. 117. Fig. 118.

centre, avec une ouverture de compas égale à AD, décrivons un second cercle qui coupe le premier en F. La parallèle demandée est AF [91].

Op. ($2R_1 + 4C_1 + R_2 + 2C_3$). Simplicité : 9. Exactitude : 6.

3° *Avec la règle et l'équerre.* On place le grand côté DE (fig. 118) de l'équerre sur BC et on applique une règle contre le côté DF ; puis on fait glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le côté DE prenne une position D'E' passant par A, et on trace suivant D'E' une droite, qui est la parallèle demandée ; car les angles correspondant FDE, F'D'E' sont égaux.

Op.($2R'_1 + E + R_2$). Simplicité : 4. Exactitude : 3.

Ce dernier procédé est rapide et suffisamment précis ; il ne suppose pas que l'équerre soit *juste*, mais simplement que ses côtés soient bien rectilignes.

119. Quand on veut mener, par plusieurs points donnés, des perpendiculaires à une même droite, on construit la première perpendiculaire au moyen de la règle et du compas, et, par les autres points, on lui mène des parallèles avec la règle et l'équerre.

120. Problème. — *Par un point* O *d'une droite* OX (fig. 119) *mener une droite qui fasse avec* OX *un angle égal à un angle donné* A.

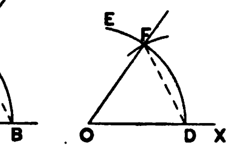


Fig. 119.

De A comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un cercle qui coupe les deux côtés de l'angle en B et C ; de O comme centre, avec le même rayon, décrivons un cercle DE, qui rencontre OX en D ; enfin, de D comme centre, avec une ouverture de compas égale à BC, décrivons un arc de cercle qui coupe DE en F : l'angle DOF est égal à l'angle A, car les deux triangles ODF et ABC ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

Op. $(2R_1 + 5C_1 + R_2 + 3C_3)$. Simplicité : 11. Exactitude : 7.

121. Problème. — *Partager un angle ou un arc de cercle en deux parties égales.*

Soit BAC l'angle donné (fig. 120). Du sommet A comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons un cercle, qui coupe les côtés de l'angle en B et C ; puis de B et de C comme centres, avec le même rayon, décrivons deux arcs de cercle qui coupent en D : AD est la bissectrice demandée ; car, les triangles ABD, ACD étant égaux

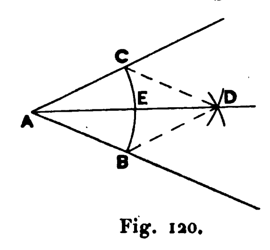


Fig. 120.

comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, les angles en A sont égaux.

La bissectrice AD passe par le milieu de l'arc BC.

Op.($2R_1 + 3C_1 + R_2 + 3C_3$). Simplicité : 9. Exactitude : 5.

La possibilité de cette construction suffit à prouver l'*existence* de la bissectrice d'un angle ou du milieu d'un arc.

## Construction de triangles, etc.

122. Problème. — *Construire un triangle* ABC *connaissant un côté:* BC = *a et les deux angles adjacents:* B = β, C = γ.

Il suffit de prendre sur une droite indéfinie une longueur BC (fig. 121) égale à la longueur donnée *a* et de mener par B et C deux droites BA et CA faisant avec BC des angles respectivement égaux aux angles donnés β et γ.

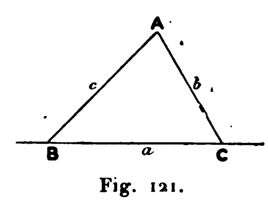


Fig. 121.

123. Problème. — *Construire un triangle* ABC *connaissant un angle* A = α *et les deux côtés qui le comprennent :* AB = *c*, AC = *b*.

Il suffit de faire un angle BAC égal à l'angle donné α et de prendre sur les côtés de cet angle des longueurs AB et AC égales aux longueurs données *c* et *b*.

124. Problème. — *Construire un triangle* ABC *connaissant les trois côtés :* BC = *a*, CA = *b*, AB = *c*.

Il suffit de prendre sur une droite indéfinie une longueur BC égale à *a* et de décrire, de B et de C comme centres, avec *c* et *b* pour rayons, des arcs de cercle qui

se coupent en un point A, qui est le troisième sommet du triangle demandé.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les deux cercles se coupent, c'est-à-dire [101] que chacune des trois longueurs $a$, $b$, $c$ soit moindre que la somme des deux autres.

125. Problème. — *Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a et un côté de l'angle droit b.*

1° Faisons un angle droit A (fig. 122). Portons sur l'un des côtés une longueur $AC = b$, et de C comme centre, avec $a$ pour rayon, décrivons un cercle qui coupe l'autre côté en B : ABC est le triangle demandé. Le problème est toujours possible, en supposant bien entendu $a > b$, et n'a qu'une solution.

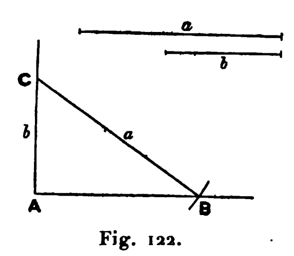


Fig. 122.

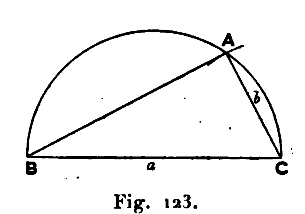


Fig. 123.

2° Si l'hypoténuse doit avoir une position déterminée BC (fig. 123), sur cette ligne comme diamètre on décrira une demi-circonférence et, de C comme centre avec $b$ pour rayon, on tracera un arc de cercle qui coupera la demi-circonférence en A : ABC sera le triangle demandé.

126. Problème. — *Construire un triangle* ABC *connaissant deux côtés* $BC = a$, $AC = b$ *et l'angle opposé à l'un d'eux : par exemple*, $A = \alpha$.

Faisons un angle $XAY = \alpha$ (fig. 124); prenons, sur l'un de

ses côtés, $AC = b$ et, de C comme centre avec $a$ pour rayon, décrivons une circonférence : si B est un point commun à cette circonférence et à la *demi-droite* AX, le triangle ABC répondra à la question.

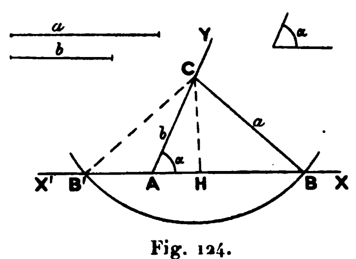


Fig. 124.

Discussion. — *Discuter* un problème, c'est chercher à quelles conditions doivent satisfaire les quantités données pour que le problème soit possible, et, dans le cas où il est possible, combien il a de solutions.

Ici, pour que le problème soit possible, il faut que la circonférence rencontre la *demi-droite* AX; ce qui exige d'abord que son rayon $a$ soit supérieur ou au moins égal à la distance CH du point C à la droite AX :

$$a \geqq CH.$$

Or, quel que soit l'angle A, on a toujours

$$b \geqq CH.$$

Donc la condition $a \geqq CH$ sera remplie si l'on a

$$a > b.$$

Dans ce cas, la circonférence décrite de C comme centre avec $a$ pour rayon, coupe la droite indéfinie AX en deux points B et B' *situés de part et d'autre de* A. Donc l'un de ces deux points est sur la *demi-droite* AX et l'autre sur son prolongement AX'. Appelons B celui qui est situé sur AX : le triangle ABC répond à la question. L'angle B'AC est égal à $180° - \alpha$; donc le triangle AB'C ne convient pas, à moins que $\alpha$ ne soit égal à 90° et alors les deux triangles ABC, AB'C sont égaux, de sorte que, même dans ce cas, il n'y a encore qu'une solution.

Soit maintenant $a = b$. Dans ce cas, le triangle demandé

doit être isoscèle et *il faut* que l'angle donné A soit aigu. Cette condition est *suffisante*; car alors $a > \mathrm{CH}$ et la circonférence décrite de C comme centre, avec $a$ ou $b$ pour rayon, coupe AX en deux points A et B (fig. 125) et le triangle ABC répond à la question.

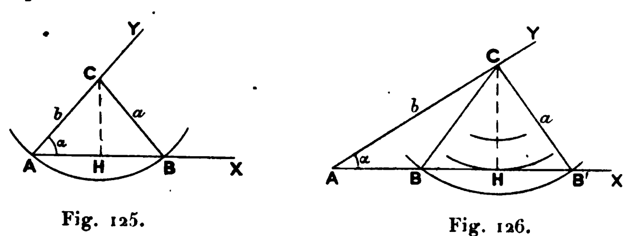



Fig. 125. Fig. 126.

Soit enfin $a < b$. Dans ce cas, *il faut* que l'angle A soit aigu [57, remarque].

Supposons cette condition remplie (fig. 126). Si $a > \mathrm{CH}$, le cercle décrit de C comme centre, avec $a$ pour rayon, coupera AX en deux points B, B′ et les deux triangles ABC, AB′C répondront à la question.

Si $a = \mathrm{CH}$, le cercle est tangent en H à la droite AX et le triangle rectangle ACH est alors la solution unique du problème.

Si $a < \mathrm{CH}$, il n'y a pas de solution.

RÉSUMÉ

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a > b$ | | | 1 solution |
| $a = b$ | $A < 90°$ | | 1 solution |
| | $A \geqq 90°$ | | pas de solution. |
| $a < b$ | $A \geqq 90°$ | | pas de solution |
| | $A < 90°$ | $a > \mathrm{CH}$. | 2 solutions |
| | | $a = \mathrm{CH}$. | 1 solution : triangle rectangle. |
| | | $a < \mathrm{CH}$. | pas de solution. |

127. **Problème.** — *Construire sur une droite donnée* AB (fig. 127) *un segment capable d'un angle donné* α.

Soient AMB le segment demandé, BT la tangente en B ;

nous savons que $\widehat{ABT} = \alpha$. D'ailleurs, le rayon OB est perpendiculaire à BT et le centre O se trouve sur la perpendiculaire au milieu de AB. D'où la construction suivante :

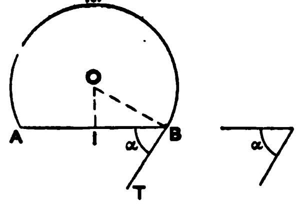


Fig. 127.

Au point B faites un angle ABT égal à $\alpha$ ; élevez la perpendiculaire au milieu de AB et la perpendiculaire à BT au point B ; du point O d'intersection de ces deux perpendiculaires, avec OA pour rayon, décrivez un cercle : la portion AMB de ce cercle située par rapport à AB du côté opposé à BT est le segment demandé.

128. **Problème.** — *Mener une tangente à un cercle par un point donné.*

Soit A (fig. 128) le point donné et AB une tangente au cercle O, passant par ce point. Cette tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon OB ; donc l'angle OBA est droit et le point B se trouve sur la circonférence de diamètre AO.

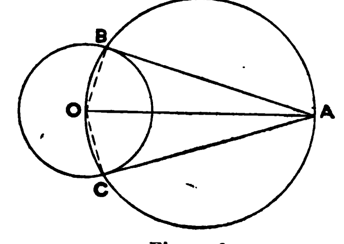


Fig. 128.

Réciproquement, si B est un point commun à la circonférence O et à la circonférence de diamètre AO, l'angle OBA sera droit et la droite AB sera tangente.

Donc, par le point A, on peut mener autant de tangentes à la circonférence O que cette dernière a de points communs avec la circonférence de diamètre OA, c'est-à-dire une, deux ou aucune selon que le point A est à l'ex-

térieur de la circonférence O, sur cette circonférence, ou à l'intérieur.

129. PROBLÈME. — *Mener à un cercle une tangente parallèle à une droite donnée* Δ.

Il n'y a qu'à mener, par les extrémités du diamètre perpendiculaire à Δ, des parallèles à Δ.

130. PROBLÈME. — *Mener à deux cercles* O *et* O′ (fig. 129) *une tangente commune.*

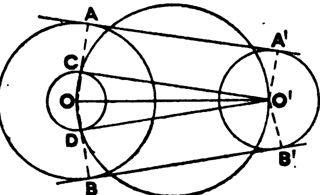


Fig. 129.

Soient R, R′ les rayons des deux circonférences ; supposons R > R′ et soient A, A′ les points de contact d'une tangente commune *extérieure*, c'est-à-dire d'une tangente commune qui laisse les deux cercles d'un même côté. Menons les rayons OA, O′A′ et menons par O′ la parallèle à AA′ ; cette droite rencontre OA en un point C tel que

$$OC = OA - O'A' = R - R'.$$

Donc O′C est tangente au cercle décrit de O comme centre avec R — R′ pour rayon.

Réciproquement, si O′C est tangente à ce cercle et que, par le point A où OC rencontre la circonférence O, on mène la tangente AA′ à cette circonférence, cette droite AA′ sera aussi tangente à la circonférence O′; car, en abaissant O′A′ perpendiculaire sur AA′, on aura O′A′ = CA = R′.

Donc il y a autant de tangentes communes extérieures que l'on peut mener par le point O′ de tangentes au

cercle de centre O et de rayon $R - R'$ ; c'est-à-dire deux, une ou aucune selon que l'on aura

$$OO' > R - R', \quad OO' = R - R', \quad \text{ou} \quad OO' < R - R'.$$

Remarque. — Si $R = R'$, on vérifie sans peine, en reprenant le raisonnement ci-dessus, qu'il y a toujours deux tangentes communes extérieures parallèles à $OO'$.

On prouve absolument de la même manière qu'il y a autant de tangentes communes *intérieures* que l'on peut mener par le point $O'$ de tangentes au cercle de

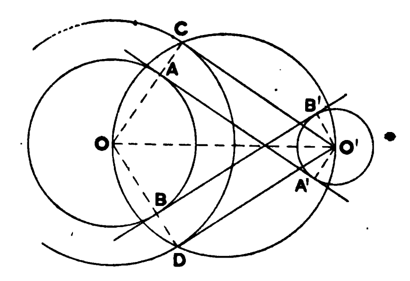



Fig. 130.

centre O (fig. 130) et de rayon $OC = R + R'$ ; c'est-à-dire deux, une ou aucune selon que

$$OO' > R + R', \quad OO' = R + R', \quad \text{ou} \quad OO' < R + R'.$$

En résumé,

1° Deux cercles *extérieurs* ont quatre tangentes communes : deux extérieures et deux intérieures ;

2° Deux cercles *tangents extérieurement* ont trois tangentes communes : deux extérieures et une intérieure ;

3° Deux cercles *sécants* ont deux tangentes communes extérieures ;

4° Deux cercles *tangents intérieurement* ont une tangente commune extérieure ;

5° Deux cercles *intérieurs* n'ont aucune tangente commune.

EXERCICES

1. Construire un trapèze, connaissant ses quatre côtés.

— Si, par l'une des extrémités de l'un des côtés non parallèles, on mène une parallèle à l'autre, on forme un triangle dont on connaît les trois côtés. On peut construire ce triangle et en déduire le trapèze.

2. Les points d'intersection M, N, M', N' des tangentes communes extérieures à deux cercles O et O' avec les tangentes communes intérieures sont sur un même cercle passant par O et O'.

— Car les angles OMO', ONO' sont droits.

Que devient ce théorème quand les cercles O et O' sont tangents extérieurement ?

3. Par un point A commun à deux cercles O et O', mener une sécante ABB' telle que la partie BB' comprise entre les deux cercles soit égale à une longueur donnée $l$.

— En abaissant OC, O'C' perpendiculaires sur ABB' et OD perpendiculaire sur O'C', on aura $OD = \frac{l}{2}$, etc.

On en déduira que BB' est maximum quand la sécante est parallèle à OO'.

4. Construire un triangle ABC, connaissant le côté BC, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés.

— En prenant sur AB des longueurs AD = AE = AC, on aura

$$BD = AB + AC, \quad BE = AB - AC,$$
$$\widehat{BDC} = \frac{A}{2}, \quad \widehat{BEC} = 90^\circ + \frac{A}{2}, \text{ etc.}$$

On peut remarquer que

$$\widehat{BCE} = \frac{1}{2}(C - B), \quad \widehat{BCD} = 90^\circ + \frac{1}{2}(C - B),$$

ce qui permet de construire un triangle connaissant un côté, la différence des angles adjacents et la somme ou la différence des deux autres côtés.

5. Construire un cercle tangent à un cercle et à une droite donnés, connaissant le point de contact avec le cercle ou avec la droite.

— On démontrera que la droite qui joint ces deux points de con-

tact passe par l'une des extrémités du diamètre du cercle donné perpendiculaire à la droite donnée.

6. Etant donnés trois points A, B, C, trouver un quatrième point du plan d'où l'on voie AC et BC sous des angles donnés $\alpha$ et $\beta$.

— On construira sur AC et sur BC des segments capables des angles $\alpha$ et $\beta$.

7. Inscrire dans un triangle donné ABC un triangle égal à un triangle donné DEF.

— On commence par circonscrire à DEF un triangle égal à ABC; pour cela on décrit sur DE et sur DF des segments capables des angles C et B, et on mène par D une sécante telle que la partie comprise entre les deux cercles soit égale à BC [ex. 3].

8. Construire un triangle connaissant une bissectrice, une médiane et une hauteur issues d'un même sommet.

— On placera ces trois droites et on remarquera que la bissectrice et la médiatrice se coupent sur le cercle circonscrit.

9. Construire un triangle, connaissant :

1° La base, l'angle opposé et la hauteur correspondante:

2° Un côté ou un angle et deux hauteurs;

3° Un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit;

4° Le périmètre et deux des rayons des cercles inscrit et exinscrits ;

5° Un angle, la somme des côtés de cet angle et le rayon du cercle inscrit ;

6° La différence de deux côtés et les rayons des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle formé par ces deux côtés ;

7° La bissectrice d'un angle, la hauteur correspondante et le rayon du cercle inscrit ;

8° Le périmètre, un angle et la bissectrice correspondante ;

9° Un angle, la bissectrice correspondante et une hauteur.

10. Inscrire à un carré un triangle équilatéral ayant un sommet en un sommet du carré.

11. Construire un triangle ABC, connaissant deux côtés AB, AC et la médiane AD issue du point A. — Si l'on prolonge AD d'une longueur DE = AD, on a EC = AB; donc on connaît les trois côtés du triangle ACE, etc.

12. Construire un quadrilatère ABCD, connaissant les quatre côtés et la droite qui joint les milieux M et N des deux côtés opposés AB et CD. — Soit E le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AB et AD, et soit F le milieu de EC; dans le triangle BEC, on connaît deux côtés, BE et BC, et la médiane BF = MN, etc.

13. Tracer trois cercles tangents entre eux et tangents intérieure-

**ment à un cercle donné. — On mènera deux rayons de ce cercle faisant un angle de 120°, etc.**

**14. Tracer deux cercles tangents entre eux et tangents à une même droite en des points donnés, connaissant la somme ou la différence de leurs rayons.**

**15. Etant donnés trois points, mener par l'un d'eux une droite dont la somme ou la différence des distances aux deux autres points soit égale à une longueur donnée.**

**16. Tracer un cercle de rayon donné qui coupe deux droites ou deux cercles donnés sous des angles donnés.**

**17. Etant donnés deux points, un cercle et une droite, mener par les deux points un cercle coupant le cercle donné en deux points tels que la droite qui les joint fasse un angle donné avec la droite donnée.**

**18. Etant donnés deux points A et B et une droite XY, trouver sur la droite un point M tel que l'angle AMX soit double de l'angle BMY.**

**— Si les deux points A et B sont de part et d'autre de XY, la droite AM est tangente au cercle de centre B tangent à XY. Dans le cas contraire, on remplacera l'un des deux points par son symétrique par rapport à XY.**

**19. Construire un triangle ABC connaissant les deux côtés AB, AC et sachant que l'angle B est double de l'angle C.**

**— Soit D le point de la droite BC tel que AD = AB ; le triangle ADC est isoscèle, etc.**

---

## CHAPITRE VI

## DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE

131. Considérons une figure qui se déplace dans son plan *sans se déformer*, c'est-à-dire de façon que les distances mutuelles des points de la figure restent invariables, ainsi que les angles formés par les droites qui joignent ces points deux à deux.

Nous avons déjà étudié le cas où l'un des points de la figure reste fixe [27]. Dans ce cas, le déplacement s'ap-

pelle *rotation* et tous les points de la figure tournent du même angle autour du point fixe.

Soient (fig. 131) O le point fixe ; A, B deux points de la figure, que la rotation amène en A′, B′; OC une demi-droite parallèle à AB et de même sens, invariablement liée à la figure ; OC′ la position de cette demi-droite après la rotation. L'angle $(\overline{AB}, \overline{A'B'})$ est, par définition, égal à $(\overline{OC}, \overline{OC'})$, par suite, égal à $(\overline{OA}, \overline{OA'})$ : c'est ce qu'on exprime en disant que *toutes les droites qui joignent deux points de la figure tournent du même angle.*

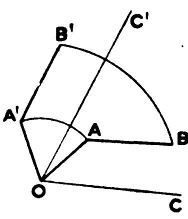


Fig. 131.

132. Si on fixe deux points de la figure, elle ne peut plus bouger. Par conséquent,

*La position d'une figure plane indéformable mobile dans son plan est déterminée par celle de deux de ses points.*

## TRANSLATION

133. Définition. — Quand tous les points d'une figure décrivent des portions de droites parallèles à une même direction, de même sens et égales, le déplacement de la figure s'appelle *translation.*

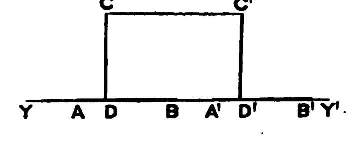


Fig. 132.

Pour démontrer que ce mouvement est possible sans que la figure se déforme, considérons une direction arbitraire XX′ (fig. 132), et soient A et B, deux points appartenant à la figure,

ou invariablement liés avec elle, situés sur une droite YY' parallèle à XX'; déplaçons la figure de manière que les points A et B glissent sur YY' dans le sens AB, par exemple, et viennent en A' et B'. Le chemin BB' parcouru par le point B est égal au chemin AA' parcouru par le point A; car AB = A'B', puisque la figure ne se déforme pas; donc, si de la ligne totale ABB' on retranche successivement AB et A'B', les restes BB' et AA' sont égaux. Tous les points de la figure situés sur AB, ou sur son prolongement, glissent sur YY' dans le même sens que A, et on démontre, comme pour le point B, qu'ils parcourent des chemins égaux à AA'. Soit C un point de la figure non situé sur la droite AB; abaissons CD perpendiculaire sur AB et considérons cette droite CD comme invariablement liée à la figure. Quand la figure se déplace de la façon indiquée, le point D glisse sur YY' dans le même sens que A et parcourt un chemin DD' égal à AA'. La droite DC se déplace sans changer de longueur et sans cesser d'être perpendiculaire à AB, par suite, à YY'; donc le point C décrit une portion de droite CC' égale et parallèle à DD', ou à AA', et de même sens. — C. q. f. d.

134. On nomme une translation par deux lettres, AA', qui désignent les positions initiale et finale d'un point de la figure.

135. ***Théorème.*** — *Pendant la translation, toutes les droites de la figure se déplacent parallèlement à elles-mêmes.*

Soient A et B (fig. 133), deux points, de la figure, que la translation amène en A' et B'. Comme AA', BB' sont

égaux, parallèles et de même sens, le quadrilatère AA′B′B est un parallélogramme. Donc AB et A′B′ sont parallèles et de même sens.

136. Compositions de plusieurs translations. — Supposons qu'une première translation AA′ (fig. 133) amène la figure AB... en A′B′... ; qu'une deuxième translation A′A″ amène A′B′... en A″B″...; et qu'une troisième translation amène A″B″... en A‴B‴...

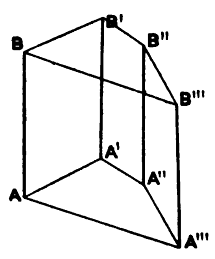


Fig. 133.

D'après ce qui précède, les droites AB, A‴B‴ sont parallèles, de même sens et égales ; donc le quadrilatère ABB‴A‴ est un parallélogramme ; donc AA‴, BB‴, ... sont parallèles, de même sens et égales. Par conséquent, on peut amener directement AB... sur A‴B‴... par une translation unique AA‴, qu'on appelle la *résultante* des translations composantes AA′, A′A″, A″A‴.

On voit que la translation résultante AA‴ est représentée par la droite qui *ferme le polygone* AA′A″A‴.

137. ***Théorème.*** — *Soient* ABC..., A′B′C′..., *deux positions d'une figure plane indéformable qui se déplace dans son plan d'une façon quelconque ; on peut toujours l'amener de la première position à la seconde par une rotation ou par une translation.*

Comme la position de la figure est déterminée par celle de deux de ses points, il suffit de montrer qu'on peut amener la portion de droite AB sur son égale A′B′ par une rotation ou par une translation.

1° AB et A′B′ sont parallèles et de même sens (fig. 134).

Dans ce cas, ABB′A′ est un parallélogramme, donc AA′ et BB′ sont parallèles, de même sens et égales ; donc on peut amener AB sur A′B′ par une translation AA′.

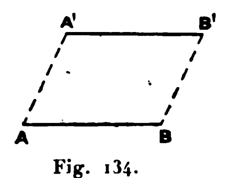


Fig. 134.

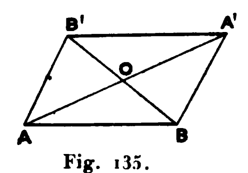


Fig. 135.

2° AB et A′B′ sont parallèles et de sens contraires (fig. 135). Dans ce cas, ABA′B′ est un parallélogramme ; AA′ et BB′ se coupent en leur milieu O. Donc on peut amener AB sur A′B′ par une rotation de 180° autour du point O.

3° AB et A′B′ ne sont pas parallèles (fig. 136).

Dans ce cas, menons par A′ la *demi-droite* A′X telle que

$$(\overline{A'B'}, \overline{A'X}) = (\overline{AB}, \overline{AA'}) ;$$

prenons sur cette demi-droite une longueur A′C égale à AA′ et soit O le centre du cercle passant par A, A′ et C. Faisons tourner le triangle ABA′ de l'angle AOA′ autour du point O : AA′ viendra s'appliquer sur A′C et AB sur A′B′.

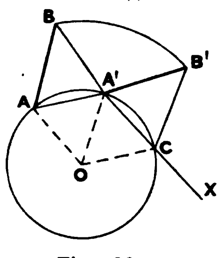


Fig. 136.

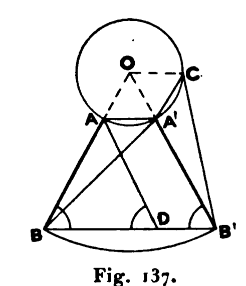


Fig. 137.

138. Cas particulier. — Supposons AA′ parallèle à BB′ (fig. 137). Soit O le point de rencontre des droites AB

et A′B′ ; en menant par A la parallèle à A′B′, qui ren contre BB′ en D, le triangle ABD est isoscèle ; donc les triangles OBB′, OAA′ sont aussi isoscèles :

$$OB = OB', \quad OA = OA' ;$$

donc on peut amener AB sur A′B′ en le faisant tourner de l'angle AOA′ autour du point O.

On arrive au même résultat en suivant la méthode générale, c'est-à-dire en construisant un triangle A′B′C *directement égal* au triangle ABA′ ; car les angles OAA′, OA′C étant égaux, les triangles OAA′, OA′C sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux ; donc $OC = OA' = OA$. Le point O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle AA′C, etc.

139. Ainsi, dans le cas général, on peut amener la figure de la position ABC... à la position A′B′C′... par une rotation autour d'un point O, qu'on appelle le *centre de rotation*. D'ailleurs, ce point étant équidistant de A et de A′, de B et de B′, ... se trouve à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux de AA′, de BB′, de CC′, ... (fig. 138). Donc toutes ces perpendiculaires concourent en un même point.

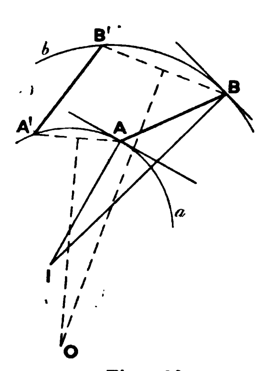


Fig. 138.

140. Considérons (fig. 138) les lignes *a*, *b*, *c*,... parcourues par les différents points de la figure A′B′C′..., quand cette figure se déplace d'une façon quelconque ; et supposons que cette figure se rapproche indéfiniment de la position ABC... Les droites AA′, BB′, CC′,... ont pour limites les tangentes aux *trajectoires a*, *b*, *c*,... en A, B, C,... Donc les perpendicu-

laires aux milieux de AA', BB', CC',... deviennent les normales à ces trajectoires en A, B, C,... ; comme elles n'ont pas cessé de concourir en un même point, nous en concluons que

*Si une figure plane indéformable se déplace dans son plan, pour chaque position de la figure, les normales aux lignes décrites par ses différents points se coupent en un même point* I, *qu'on nomme* LE CENTRE INSTANTANÉ DE ROTATION.

141. **Théorème.** — *Si les triangles* ABC, ABD,..., ABL *sont respectivement et directement égaux aux triangles* A'B'C', A'B'D',..., A'B'L', *les deux figures* ABCD...L, A'B'C'D'... L' *sont directement égales.*

Car, la position d'un triangle mobile dans son plan étant déterminée par celle de deux de ses sommets, si l'on déplace la première figure dans son plan de manière que A vienne coïncider avec A' et B avec B', les points C, D,..., L, viendront coïncider avec C', D',..., L'.

142. **Théorème.** — *Si les triangles* ABC, ABD,..., ABL *sont respectivement et inversement égaux aux triangles* A'B'C', A'B'D',...,A'B'L', *les deux figures* ABCD...L, A'B'C'D'...L' *sont inversement égales.*

Car, si l'on retourne l'une d'elles, on est ramené au cas précédent.

### EXERCICES

1. Quand une droite d'une figure mobile passe constamment par un point fixe O, cette droite est à chaque instant tangente en O à la trajectoire décrite par celui de ses points qui, à ce moment, coïncide avec le point O. Le centre instantané de rotation se trouve sur la perpendiculaire à cette droite menée par O.

2. Soit C une courbe quelconque et O un point fixe ; sur une sécante variable menée par O et rencontrant la courbe C en P, on porte, de part et d'autre de P, des longueurs PM et PN égales à une longueur donnée *a*. Le lieu décrit par les points M et N quand la sécante tourne autour du point O s'appelle *une conchoïde de la courbe* C.

Construire la tangente en un point de la conchoïde d'un cercle ou d'une droite.

**3. Les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites fixes, ou sur deux cercles fixes. Trouver le centre instantané de rotation.**

**4. Etant donné un triangle équilatéral ABC, quel est le point autour duquel il faut faire tourner le côté AB pour l'amener en CD, sur le prolongement de AC ?**

**5. Une figure plane indéformable glisse dans son plan; on sait qu'un point de cette figure d'abord situé en A se trouve finalement en A' et que la figure a tourné d'un angle de 60°, dans un sens déterminé. Construire le centre de la rotation qui donne à la figure le même déplacement final que celui qui vient d'être défini. (Baccalauréat, Rennes, 1896.)**

**6. On donne trois points O, A, B non en ligne droite. On porte sur les droites AO, BO, à partir des points A et B, et du même côté de AB, des longueurs AC, BD égales à $h$. On porte aussi sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB, des longueurs AC', BD' égales à $h'$.**

**1° Démontrer que la perpendiculaire à CD, en son milieu, passe par un point fixe $\omega$, quand $h$ varie. Démontrer de même que la perpendiculaire à C'D', en son milieu, passe par un point fixe $\omega'$, quand $h'$ varie.**

**2° Construire la droite CD, connaissant sa longueur. — Même question pour la droite C'D'. (Concours général, 1885.)**

— On remarquera que $\widehat{C\omega D} = \widehat{A\omega B}$ et $\widehat{C'\omega' D'} = \widehat{A\omega' B}$.

# LIVRE III

## CHAPITRE PREMIER

## VECTEURS

143. Le segment de droite AB (fig. 139) parcouru en allant de A en B s'appelle le *vecteur* ou *segment* AB :

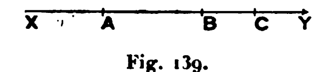



Fig. 139.

A est l'*origine*, B l'*extrémité*. Ce même segment parcouru de B vers A s'appelle le *vecteur* BA.

Sur la droite XY, qui porte le vecteur AB, on peut se déplacer dans deux sens différents, le sens XY ou le sens YX ; l'un de ces sens, celui qu'on veut, s'appelle le sens *positif*, l'autre est le sens *négatif*. Le vecteur AB est dit *positif* ou *négatif*, selon qu'il est parcouru dans le sens que l'on regarde comme positif, ou dans le sens contraire.

Quand on considère plusieurs vecteurs portés par des droites parallèles, il est entendu que le sens choisi comme positif est le même pour toutes ces droites, à moins que le contraire ne soit spécifié.

On appelle *mesure algébrique* d'un vecteur AB et on désigne par la notation $\overline{AB}$ le nombre qui mesure la longueur de ce vecteur précédé du signe + ou du signe —, selon que ce vecteur est positif ou négatif.

Il résulte de cette définition que $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires :

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = - \overline{BA}.$$

On dit que deux vecteurs sont *parallèles* quand ils sont portés par la même droite ou par des droites parallèles.

On appelle *produit* et *rapport de deux vecteurs parallèles* le produit et le rapport de leurs mesures algébriques.

Nous continuerons à désigner par AB la valeur absolue du vecteur AB, c'est-à-dire le nombre qui mesure la longueur de ce vecteur. Ainsi,

$$\overline{AB} = + AB, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} = - AB,$$

selon que le vecteur AB est positif ou négatif.

144. **Théorème.** — *Étant donné un nombre quelconque de points* A, B, C,..., L, *sur une droite, on a*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{LA} = 0.$$

La relation est vraie, par définition, pour deux points. Considérons trois points en ligne droite A, B, C. Si B est entre A et C (fig. 139) et que le sens positif soit celui de A vers C, il est évident que

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = 0.$$

Mais $-\overline{AC} = \overline{CA}$, donc

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

De même, si B est entre A et C et que le sens positif soit celui de C vers A, on a

$$\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}, \quad \text{ou} \quad \overline{CA} - \overline{CB} - \overline{BA} = 0;$$

d'où $\overline{CA} + \overline{BC} + \overline{AB} = 0$, ce qui donne la même relation que dans le premier cas.

Même raisonnement quand le point C est entre A et B, ou le point A entre B et C.

La proposition est donc vraie pour trois points. Cela étant, si elle est vraie pour $n - 1$ points A, B, C,..., K, elle sera encore vraie avec un point de plus; car des relations

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KA} = 0,$$
$$\overline{AK} + \overline{KL} + \overline{LA} = 0,$$

on déduit, en ajoutant membre à membre et en tenant compte de $\overline{AK} + \overline{KA} = 0$,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

Cette relation, qu'on appelle la *formule de Chasles* (1), est donc vraie, quel que soit le nombre des points.

Corollaire. — On en déduit

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots\ldots + \overline{KL} = - \overline{LA} = \overline{AL}.$$

En particulier, pour trois points A, B, C, on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

D'où

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}.$$

Cette dernière formule permet de remplacer un vecteur BC par une différence entre deux autres vecteurs ayant pour origine commune un point quelconque de la droite BC et pour extrémités, *le premier l'extrémité et le second l'origine* du vecteur BC.

---

(1) Chasles, célèbre géomètre français (1793-1880).

145. Application. — Soient (fig. 140) M le milieu de AB et O un point quelconque de la droite AB. On a

Fig. 140.

$$\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{MA},$$

$$\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MB} = \overline{OM} - \overline{MA};$$

d'où

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\,\overline{OM}.$$

$$\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OM}^2 - \overline{MA}^2.$$

146. Variations du rapport $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, quand le point M décrit la droite indéfinie AB (fig. 141).

Désignons ce rapport par $\lambda$. On a, dans tous les cas,

$$\lambda = \frac{\overline{MB} + \overline{BA}}{\overline{MB}} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{MB}}.$$

1° Quand M est entre A et B, $\lambda$ est négatif, car $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de sens contraires. $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{MB}}$ est aussi négatif et égal à $-\dfrac{AB}{MB}$.

Fig. 141.

Donc

$$\lambda = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

Supposons que le point M parcoure le segment AB de A en B. Quand M est en A, $\lambda = 0$ ; à mesure que M se rapproche de B, $\dfrac{AB}{MB}$ augmente, donc $\lambda$ diminue et nous allons montrer qu'il peut devenir inférieur à tout nombre négatif donné $-a$. En effet, pour que l'on ait $\lambda < -a$, il suffit que MB satisfasse à l'inégalité

$$1 - \frac{AB}{MB} < -a,$$

ou

$$1 + a < \frac{AB}{MB},$$

ou

$$MB < \frac{AB}{1 + a}.$$

On exprime ce fait en disant que, quand M se rapproche indéfiniment de B en restant compris entre A et B, $\lambda$ *décroît indéfiniment.*

2° Quand M est à droite de B, $\lambda$ est positif, car $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de même signe. $\frac{\overline{BA}}{\overline{MB}}$ l'est aussi; donc on a

$$\lambda = 1 + \frac{BA}{MB}.$$

Si M se rapproche indéfiniment de B, $\frac{BA}{MB}$ augmente; donc $\lambda$ augmente aussi et on montre comme ci-dessus qu'il finit par dépasser tout nombre positif donné d'avance ; c'est ce qu'on exprime en disant qu'il *croît indéfiniment.* Si, au contraire, M s'éloigne indéfiniment de B, $\lambda$ diminue et *tend vers 1*. En effet, soit $\alpha$ un nombre positif donné aussi petit qu'on voudra ; la différence entre $\lambda$ et 1 sera moindre que $\alpha$ si

$$\frac{AB}{MB} < \alpha, \quad \text{ou} \quad MB > \frac{BA}{\alpha}.$$

3° Quand le point M est à gauche de A, $\lambda$ est positif, car $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$ sont de même signe ; mais $\frac{\overline{BA}}{\overline{MB}}$ est négatif et égal à $-\frac{AB}{MB}$. Donc

$$\lambda = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

On en conclut, en raisonnant comme ci-dessus, que si

le point M part de A et s'éloigne indéfiniment vers la gauche, $\lambda$ augmente à partir de o et se rapproche indéfiniment de 1.

En résumé, $\lambda$ décroît de o à $-\infty$ (lisez: *moins l'infini*), quand M décrit le segment; AB de $+\infty$ à $+1$ quand M décrit le prolongement de AB au delà de B, et il croît de o à $+1$ quand M décrit le prolongement de BA au delà de A. Donc $\lambda$ prend une fois, et une fois seulement, toutes les valeurs positives ou négatives, sauf la valeur $+1$.

Pour combler cette lacune, nous dirons que $\lambda = 1$ quand le point M est *à l'infini* à droite ou à gauche, et, pour qu'il n'existe qu'une position de M correspondant à chaque valeur de $\lambda$, nous dirons que *le point à l'infini à droite* est le même que *le point à l'infini à gauche*.

Quand M est en B, le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ n'existe plus: nous conviendrons de dire qu'il est égal à $+\infty$, ou à $-\infty$, ou simplement à $\infty$.

Ainsi, *il existe sur la droite indéfinie* AB *un point* M *tel que* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ *ait une valeur donnée*, ET IL N'EN EXISTE QU'UN. Par conséquent, si M et M′ sont deux points de cette droite tels que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$, on pourra en conclure que ces deux points coïncident.

### DIVISION HARMONIQUE

147. Soit C un point quelconque de la droite AB (fig. 142). Il existe sur cette droite un point D tel que

M

O A C B D

Fig. 142.

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \qquad (1)$$

Ce point D est dit *conjugué harmonique* de C par rapport à A et B.

L'égalité précédente pouvant être mise sous la forme

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}},$$

on en conclut que A et B sont aussi conjugués harmoniques par rapport à C et D. On dit encore que les quatre points A, B, C, D forment une *division harmonique*, en ayant soin d'énoncer ces quatre points de façon que les deux premiers soient conjugués par rapport aux deux derniers, et réciproquement.

Prenons sur la droite AB une origine quelconque O et désignons $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ par $a, b, c, d$; nous aurons [144, corollaire]

$$\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} = a - d, \text{ etc.}$$

En substituant dans l'égalité (1), il vient

$$\frac{a-d}{b-d} + \frac{a-c}{b-c} = 0,$$

ou bien

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd). \tag{2}$$

De la relation (2) on pourrait déduire la relation (1) en refaisant les calculs précédents en sens inverse. Donc la relation (2) est équivalente à la relation (1) et définit la *conjugaison harmonique* des quatre points A, B, C, D.

En plaçant diversement l'origine, on met cette relation sous différentes formes particulières.

1° Si l'on met l'origine en D de façon que $d = 0$, la relation (2) devient

$$(a+b)\,c = 2ab,$$

c'est-à-dire

$$(\overline{DA} + \overline{DB})\,\overline{DC} = 2\,\overline{DA}.\overline{DB}; \tag{3}$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{DA}} + \frac{1}{\overline{DB}} = \frac{2}{\overline{DC}}. \tag{4}$$

Si M est le milieu de AB, $\overline{DA} + \overline{DB} = 2\overline{DM}$ [145], et la relation (3) devient

$$\overline{DM}.\overline{DC} = \overline{DA}.\overline{DB}. \qquad (5)$$

2° Si l'on met l'origine au milieu M de AB, $a + b = 0$, et la relation (2) devient

$$cd = -ab = b^2,$$

c'est-à-dire

$$\overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MB}^2. \qquad (6)$$

Le produit $\overline{MC}.\overline{MD}$ est donc positif; par conséquent, $\overline{MC}$ et $\overline{MD}$ sont de même signe, c'est-à-dire que les points C et D sont du même côté par rapport au milieu de AB.

Si $\overline{MC} = \overline{MB}$, on a aussi $\overline{MD} = \overline{MB}$; c'est-à-dire que le point B est à lui-même son conjugué. Il en est de même de A.

Si $\overline{MC}$ tend vers zéro, $\overline{MD}$ augmente indéfiniment; donc le conjugué du milieu M de AB est le point à l'infini sur la droite AB.

### VECTEURS ÉQUIPOLLENTS

148. On dit que deux vecteurs AB, CD (fig. 143) sont *équipollents* quand ils sont parallèles (ou portés par la même droite),

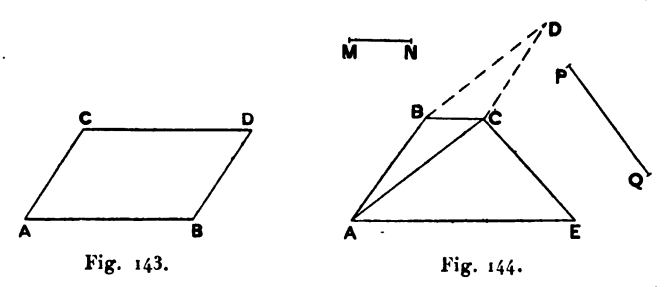



Fig. 143. Fig. 144.

de même sens et de même longueur, et on exprime cette équipollence en écrivant

$$\text{vec AB} = \text{vec CD}.$$

On appelle *somme* de plusieurs vecteurs AB, MN, PQ (fig. 144), le vecteur AE obtenu en menant par B un vecteur BC

équipollent à MN et par C un vecteur CE équipollent à PQ. Cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on ajoute les vecteurs. En effet :

1° Dans une somme de deux vecteurs AB, BC on peut intervertir l'ordre des termes; car, si on mène le vecteur CD équipollent à AB, ABDC est un parallélogramme; donc les vecteurs AC et BD sont équipollents, c'est-à-dire que

$$\text{vec AB} + \text{vec BC} = \text{vec BC} + \text{vec AB}.$$

Si les points A, B, C sont en ligne droite (fig. 145), le

A B C D

Fig. 145.

parallélogramme ABCD n'existe plus; mais la figure ABC est toujours superposable à la figure DCB *retournée;* donc les vecteurs AC et BD sont encore équipollents.

2° Dans une somme de plusieurs vecteurs, on peut remplacer deux vecteurs consécutifs par leur somme; car

$$\text{vec AB} + \text{vec BC} + \text{vec CE} = \text{vec AB} + \text{vec BE}.$$

On en déduit sans peine que, dans une somme de plusieurs vecteurs, on peut intervertir l'ordre des termes sans altérer la somme.

Remarque. — Si deux vecteurs AB, BC (fig. 145), sont portés par une même droite (ou par des droites parallèles), la mesure algébrique de leur somme AC est égale à la somme des mesures algébriques de ces vecteurs. Mais il n'en est pas de même dans le cas général : il ne faut donc pas confondre la somme de ces vecteurs, que nous désignons par *vec* AB + *vec* BC avec la somme de leurs mesures algébriques $\overline{AB} + \overline{BC}$.

### EXERCICES

1. Soient A, B, C, O quatre points en ligne droite. Démontrer qu'on a

$$\overline{OA}.\,\overline{BC} + \overline{OB}.\,\overline{CA} + \overline{OC}.\,\overline{AB} = 0, \qquad (1)$$

$$\overline{OA}^2.\,\overline{BC} + \overline{OB}^2.\,\overline{CA} + \overline{OC}^2.\,\overline{AB} + \overline{BC}.\,\overline{CA}.\,\overline{AB} = 0. \qquad (2)$$

— En remplaçant $\overline{BC}$ par $\overline{OC} - \overline{OB}$, $\overline{CA}$ par $\overline{OA} - \overline{OC}$, $\overline{AB}$ par $\overline{OB} - \overline{OA}$, on constate que les premiers membres de ces deux relations s'annulent identiquement.

En posant $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$, la relation (1) devient

$$(\alpha + \beta)\,\overline{OC} = \alpha.\overline{OA} + \beta.\overline{OB}. \qquad (3)$$

La formule (1) est due à Euler, célèbre mathématicien suisse du XVIII[e] siècle, et la formule (2) à Stewart, géomètre écossais de la même époque.

On peut déduire la formule de Stewart de celle d'Euler, en montrant que l'expression

$$\overline{OA}^2.\,\overline{BC} + \overline{OB}^2.\,\overline{CA} + \overline{OC}^2.\,\overline{AB}$$

est indépendante de la position du point O sur la droite ABC. En effet, soit O′ un autre point de cette droite ; si l'on pose $\overline{O'O} = x$, comme

$$\overline{O'A} = \overline{OA} + x, \quad \overline{O'B} = \overline{OB} + x, \quad \overline{O'C} = \overline{OC} + x,$$

on voit qn'en remplaçant O par O′ l'expression ci-dessus varie de

$$2x(\overline{OA}.\,\overline{BC} + \overline{OB}.\,\overline{CA} + \overline{OC}.\,\overline{AB}) + x^2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}).$$

Mais le coefficient de $x$ est nul, en vertu de la formule d'Euler et celui de $x^2$ l'est aussi, en vertu de la formule de Chasles. Donc l'expression considérée ne change pas quand le point O se déplace sur la droite ABC.

Pour trouver la valeur de cette expression, on peut donc supposer que le point O vienne se confondre avec A ; alors cette expression se réduit à

$$\overline{AB}^2.\overline{CA} + \overline{AC}^2.\overline{AB},$$

ou

$$\overline{AB}.\,\overline{CA}(\overline{AB} + \overline{CA}) = -\overline{AB}.\,\overline{BC}.\,\overline{CA}.$$

Par conséquent,

$$\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} = -\overline{AB}.\,\overline{BC}.\,\overline{CA}.$$

C'est la formule de Stewart. Nous verrons plus loin [189] qu'elle subsiste lorsque le point O est en dehors de la droite ABC.

2. Pour que quatre points A, B, C, D forment une division harmonique, il faut et il suffit que

$$\overline{AB}.\overline{CD} = 2\overline{BC}.\overline{DA}.$$

**3.** **A, B, C, D étant quatre points en ligne droite, trouver la relation qui existe entre les rapports :**

$$\lambda = \frac{\overline{AC}.\ \overline{BD}}{\overline{AD}.\ \overline{BC}}, \quad \mu = \frac{\overline{AB}.\ \overline{CD}}{\overline{AD}.\ \overline{CB}}.$$

**4.** **Soient A, B, $M_1$, $M_2$, $M_3$,... des points d'une droite ; on pose**

$$\frac{\overline{AM_1}}{\overline{BM_1}} = \lambda_1, \qquad \frac{\overline{AM_2}}{\overline{BM_2}} = \lambda_2, \ldots$$

**Démontrer que**

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - 1}.$$

**En déduire que**

$$\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}} : \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

**Par conséquent, la condition pour que $M_1$ et $M_2$ soient conjugués harmoniques par rapport à $M_3$ et $M_4$ est**

$$2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4).$$

**En particulier, la condition pour que $M_3$ soit le milieu de $M_1M_2$ est**

$$2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + 1).$$

---

## CHAPITRE II

## LIGNES PROPORTIONNELLES

**149.** ***Théorème.*** — *Des parallèles* AA′, BB′, CC′,.. (fig. 146) *déterminent sur deux droites concourantes* XOY, X′OY′ *des segments proportionnels.*

Considérons, par exemple, les deux segments OA, AB et les deux segments correspondants OA′, A′B′.

Il s'agit de démontrer que

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}.$$

En effet, supposons d'abord que le rapport $\frac{OA}{AB}$ soit rationnel, par exemple

$$\frac{OA}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Cela veut dire que, si l'on partage AB en trois parties égales AE, EF, FB, le segment OA se compose de deux parties OD, DA égales aux précédentes. Mais, en menant DD', EE', FF' parallèles à AA', on voit que OA' est décomposé en deux parties et A'B' en trois parties. Toutes ces parties sont égales ; par exemple, D'A' = E'F'. En effet, menons par D' et E' des parallèles à XY, qui rencontrent AA' et FF' en G et H. Les triangles D'GA', E'HF' sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun : D'G = E'H, car D'G = DA et E'H = EF ; les angles GD'A', HE'F' sont égaux comme correspondants et les angles D'GA', E'HF' sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles et de même sens. On en conclut que D'A' = E'F'. Par conséquent,

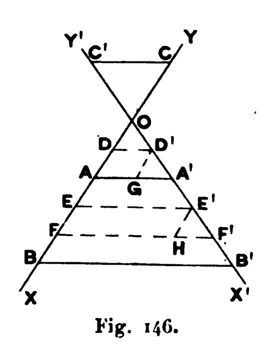


Fig. 146.

$$\frac{OA'}{A'B'} = \frac{2}{3} = \frac{OA}{AB}.$$

On traite ensuite le cas où $\frac{OA}{AB}$ est irrationnel en raisonnant comme au n° 104. Ainsi, dans tous les cas, les rapports $\frac{OA}{AB}$, $\frac{OA'}{A'B'}$ sont égaux.

On prouve de même que

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}, \quad \frac{OA}{OC} = \frac{OA'}{OC'}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}, \text{ etc.}$$

PROJECTIONS

150. Définitions. — Étant données deux droites concourantes XY et Δ (fig. 147), on appelle *projection* d'un point A sur l'*axe* XY *parallèlement à* Δ le point de rencontre *a* de cet axe avec la parallèle à Δ menée par A. Si Δ est perpendiculaire sur XY, le point *a* s'appelle la *projection orthogonale* ou simplement la *projection de* A *sur* XY.

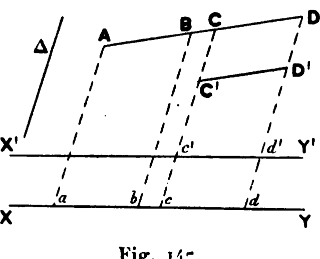


Fig. 147.

On appelle *projection d'un vecteur* AB le vecteur *ab* qui a pour origine et pour extrémité les projections de l'origine et de l'extrémité de AB.

151. **Théorème.** — *Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leurs projections sur un même axe (ou sur des axes parallèles) parallèlement à une même droite* Δ.

1° Soient AB et CD deux vecteurs portés par une même droite, *ab* et *cd* leurs projections. Nous savons [149] que les deux rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}, \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ ont même valeur absolue ; ils ont aussi le même signe ; car, selon que AB et CD sont de même sens ou de sens contraires, leurs projections *ab* et *cd* sont aussi de même sens ou de sens contraires. Donc ces deux rapports sont égaux.

2° Soient maintenant AB et C′D′ deux vecteurs portés par des droites parallèles; *ab* et *c′d′* leurs projections sur deux axes parallèles XY, X′Y′. Soient C et D, *c* et *d* les points de rencontre de C′*c′* et de D′*d′* avec AB, *ab*; on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}, \quad \overline{CD} = \overline{C'D'}, \quad \overline{cd} = \overline{c'd'}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{c'd'}}.$$

152. Corollaire. — *Si, dans un triangle* ABC, *on mène une parallèle au côté* BC, *qui rencontre les deux autres*

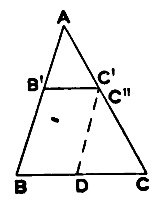


Fig. 148.

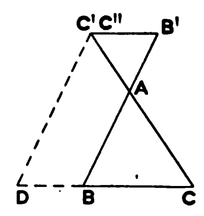


Fig. 149.

*côtés* AB, AC (fig. 148) *ou leurs prolongements* (fig. 149) *en* B′, C′, *on a*

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}.$$

En effet, AC et AC′ sont les projections de BC et de B′C′ sur AC parallèlement à AB. D'ailleurs, on peut s'en rendre compte directement, en menant par C′ la parallèle à AB, qui rencontre BC en D. On a [149 et 151],

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}, \quad \overline{BD} = \overline{B'C'};$$

donc

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}.$$

153. Réciproquement, *étant donnés un triangle* ABC *et deux points* B′ *et* C′ *situés, l'un sur* AB *ou sur son prolongement, l'autre sur* AC *ou sur son prolongement, si*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},$$

B′C′ *est parallèle à* BC.

En effet, menons par B′ la parallèle à BC, qui rencontre AC en C″; on a

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}.$$

D'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC''}}{\overline{AC}};$$

d'où $\overline{AC'} = \overline{AC''}$. Donc le point C′ coïncide avec C″.

C. q. f. d.

154. Plus généralement, *soient* ABCD (fig. 150) *un trapèze et deux points* E *et* F *situés sur les côtés non parallèles* AD, BC *ou sur leurs prolongements, si*

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}},$$



Fig. 150.

EF *est parallèle à* AB *et à* CD.

En effet, menons par E la parallèle à AB, qui rencontre BC en F′; on a [151]

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'C}}.$$

D'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'C}};$$

par conséquent, F coïncide avec F′ [146].

Corollaire. — *La droite qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases.*

155. ***Théorème.*** — *Plusieurs droites passant par un même point* O (fig. 151) *déterminent sur deux parallèles des segments proportionnels.*

Soient A, B, C; A′, B′, C′, les points où ces droites rencontrent les deux parallèles; on a

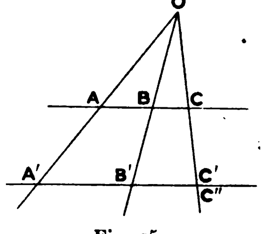


Fig. 151.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}, \qquad \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

Réciproquement, *soient* A, B, C, *trois points d'une droite et* A′, B′, C′, *trois points d'une autre droite parallèle à la première, si*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}},$$

*les trois droites* AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point (à moins qu'elles ne soient parallèles).*

En effet, si AA′ et BB′ se rencontrent en un point O, menons OC, qui rencontre A′B′ en un point C″. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}};$$

d'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C''}};$$

d'ou $\overline{B'C'} = \overline{B'C''}$; donc C' et C'' coïncident.

156. **Théorème.** — ***La bissectrice intérieure ou extérieure d'un angle d'un triangle détermine sur le côté opposé des segments proportionnels aux côtés adjacents. Et réciproquement.***

Soient AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC (fig. 152) et AE la bissectrice de l'angle extérieur CAH.

Il s'agit de prouver que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

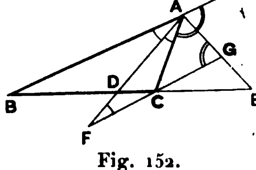


Fig. 152.

En effet, menons par C la parallèle à AB, qui rencontre AD en F et AE en G. On a [152]

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{CF}, \quad \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{CG}.$$

Reste à prouver que CF = AC = CG, ou que les triangles CAF, CAG sont isoscèles. Or $\widehat{F} = \widehat{BAF}$, comme alternes internes, et $\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$, puisque AF est bissectrice de l'angle A; donc $\widehat{F} = \widehat{FAC}$ et le triangle CAF est isoscèle. On prouve de même que $\widehat{CGA} = \widehat{GAH} = \widehat{GAC}$; donc le triangle CAG est isoscèle.

157. Les vecteurs DB et DC sont de sens contraires,

donc $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$ est négatif; au contraire, $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$ est positif. Par conséquent,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}, \quad \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = +\frac{AB}{AC}.$$

Ces égalités définissent complètement la position des points D et E. Par conséquent, si, par un moyen quelconque, on a trouvé sur la droite BC deux points D et E vérifiant ces égalités, ces deux points seront, l'un le pied de la bissectrice intérieure, l'autre le pied de la bissectrice extérieure.

Les quatre points B, C, D, E forment une division harmonique [147].

158. Problème. — *Étant donnés deux points* A *et* B (fig. 153), *trouver sur la droite indéfinie* AB *un point tel que le rapport de ses distances aux deux points* A *et* B *soit égal au rapport de deux longueurs données m et n.*

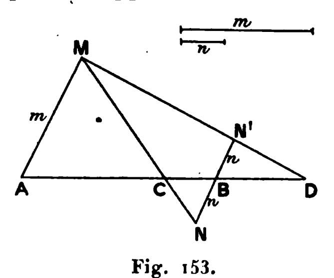


Fig. 153.

Il y a *deux* points répondant à la question : l'un C, situé entre A et B et tel que

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{m}{n},$$

l'autre D, situé sur le prolongement de AB, d'un côté ou de l'autre, et tel que

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\frac{m}{n}.$$

On dit que ces deux points partagent, *intérieurement* et *extérieurement*, la droite AB dans le rapport $\frac{m}{n}$. Ces

deux points sont conjugués harmoniques par rapport à AB.

Pour les construire, menons par A et B deux parallèles, prenons sur la première une longueur $AM = m$ et sur la seconde, de part et d'autre de B, deux longueurs $BN = BN' = n$, et traçons MN et MN' : ces deux droites couperont AB aux deux points cherchés C et D ; car

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = -\frac{m}{n},$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN'}} = +\frac{m}{n}.$$

159. **Théorème**. — *Le lieu des points, dont les distances à deux points fixes* A *et* B (fig. 154) *soient dans un rapport donné* $\lambda$, *est une circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les deux points qui divisent intérieurement et extérieurement la droite* AB *dans le rapport* $\lambda$.

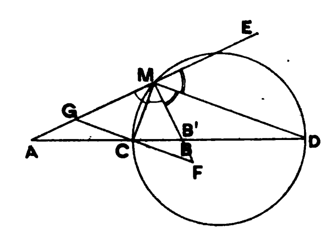


Fig. 154.

Soit M un point du lieu cherché, c'est-à-dire tel que

$$\frac{MA}{MB} = \lambda.$$

Soient C et D les points qui divisent, intérieurement et extérieurement, la droite AB dans le rapport $\lambda$ :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\lambda, \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\lambda.$$

On en conclut que

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{MA}{MB}, \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +\frac{MA}{MB}.$$

Donc les droites MC et MD sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle AMB. Par suite, l'angle CMD est droit, et le point M est sur la circonférence décrite sur CD comme diamètre.

*Réciproquement*, tous les points de cette circonférence sont des points du lieu. En effet, soit M un point de cette circonférence. Traçons MA, MC, MD et menons une droite MB′ telle que MC soit bissectrice de l'angle AMB′ et soit B′ le point de rencontre de cette droite avec CD (¹); l'angle CMD étant droit, la droite MD sera la bissectrice de l'angle supplémentaire B′ME. Donc [157] B′ est le conjugué harmonique de A par rapport à CD ; mais il en est de même de B. Donc B′ coïncide avec B et alors [156]

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \lambda.$$

*Autrement*. — On peut démontrer directement que MC est bissectrice de l'angle AMB, en menant par C la parallèle à MD, c'est-à-dire la perpendiculaire à MC, qui rencontre MA en G et MB en F. On a

$$\frac{CG}{DM} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{CF}{DM} = \frac{BC}{BD};$$

mais, par hypothèse,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD};$$

donc $\frac{CG}{DM} = \frac{CF}{DM}$ ou $CG = CF$; par conséquent, les trian-

(¹) La droite MB′ rencontre CD, car l'angle CMB′ est égal à CMA, par suite, moindre que l'angle extérieur MCD, à plus forte raison, moindre que l'angle droit CMD. (Nous supposons que A est celui des deux points A et B qui est dehors de CD.)

gles rectangles MCF, MCG sont égaux comme ayant les deux côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun, MC est bissectrice de l'angle AMB, etc.

On peut encore démontrer que tout point M de la circonférence CD est un point du lieu en remarquant que la distance BM est comprise entre BC et BD. Donc, en supposant, pour fixer les idées, $\lambda > 1$, on a

$$(\lambda + 1)\,BM > (\lambda + 1)\,BC,$$
$$(\lambda - 1)\,BM < (\lambda - 1)\,BD.$$

Mais

$$(\lambda + 1)\,BC = \lambda BC + BC = AC + BC = AB,$$
$$(\lambda - 1)\,BD = \lambda BD - BD = AD - BD = AB.$$

Donc

$$\lambda BM + BM > AB > \lambda BM - BM.$$

Il en résulte que les cercles décrits de A et B comme centres, avec $\lambda$BM et BM pour rayons, se coupent en deux points M′ et M″, qui, d'après leur construction même, sont deux points du lieu. Donc ces deux points sont sur la circonférence CD ; par suite, l'un de ces deux points coïncide avec M.

Cas particulier. — Si $\lambda = 1$, le lieu est la perpendiculaire au milieu de AB [64].

### APPLICATIONS

160. Problème. — *Partager une droite* AB (fig. 155) *en parties proportionnelles à des longueurs données* $m$, $n$, $p$.

Sur une droite quelconque passant par A, prenons trois longueurs consécutives AM $= m$, MN $= n$, NP $= p$ ;

menons par M et N les parallèles à PB, qui rencontrent AB en C et D : nous aurons

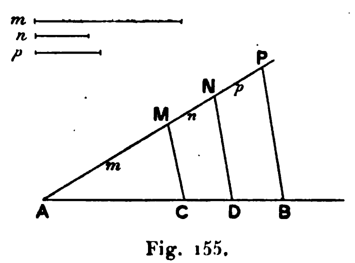


Fig. 155.

$$\frac{AC}{m} = \frac{CD}{n} = \frac{DB}{p}.$$

Le même procédé permet de diviser la droite AB en un nombre quelconque de parties égales ; il suffit pour cela de prendre les longueurs AM, MN, NP égales entre elles.

161. Définitions. — On dit qu'un nombre $x$ est la *quatrième proportionnelle* à trois nombres donnés $a$, $b$, $c$ quand on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

ou

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Dans le cas particulier où $b = c$, on a $x = \frac{b^2}{a}$ et on dit que $x$ est la *troisième proportionnelle* à $a$ et à $b$.

On dit que $x$ est la *moyenne géométrique* ou *proportionnelle* de $a$ et de $b$, quand on a

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

ou

$$x^2 = ab, \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{ab}.$$

162. Problème. — *Construire la quatrième proportionnelle à trois longueurs données $a$, $b$, $c$.*

Sur l'un des côtés d'un angle O (fig. 156), portons deux longueurs $OA = a$, $AB = b$ et, sur l'autre côté, une longueur $OC = c$; menons par B la parallèle à AC, qui rencontre OC en X : nous aurons

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{CX}, \quad \text{ou} \quad CX = \frac{bc}{a}.$$

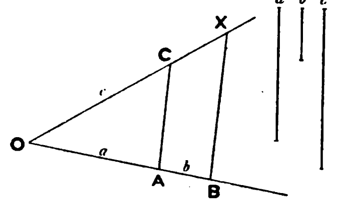



Fig. 156.

Donc CX est la quatrième proportionnelle demandée.

On construit de même la troisième proportionnelle aux longueurs $a$ et $b$; il suffit de faire $b = c$ dans la construction précédente.

163. *Construction des expressions rationnelles.* — Désignons par $a, b, c, \ldots$ des longueurs données et par $x$ une longueur inconnue.

1° Nous venons d'apprendre à construire la longueur $x$ définie par l'une des deux équations

$$x = \frac{bc}{a}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{b^2}{a}.$$

2° Il en résulte qu'on peut construire la longueur $x$ définie par une équation telle que

$$x = \frac{abcd}{b'c'd'},$$

où le numérateur contient *une* longueur de plus que le dénominateur.

Car, en construisant une longueur $\beta$ telle que $\beta = \frac{ab}{b'}$, on a

$$x = \frac{\beta cd}{c'd'};$$

puis, en construisant $\gamma = \frac{\beta c}{c'}$, il reste à construire

$$x = \frac{\gamma d}{d'},$$

c'est-à-dire la quatrième proportionnelle à $d'$, $d$, $\gamma$.

3° Soient A, B, C des monomes rationnels de degré $n+1$ et A′, B′, C′ des monomes rationnels de degré $n$, formés avec des lettres $a$, $b$,... désignant des longueurs données ; on peut construire la longueur

$$x = \frac{A + B - C}{A' + B' - C'}.$$

Car, en désignant par $\lambda$ une ligne arbitraire, qu'on pourra d'ailleurs prendre égale à l'une des lignes données, on peut écrire

$$x = \lambda \frac{\frac{A}{\lambda^n} + \frac{B}{\lambda^n} - \frac{C}{\lambda^n}}{\frac{A'}{\lambda^{n-1}} + \frac{B'}{\lambda^{n-1}} - \frac{C'}{\lambda^{n-1}}}.$$

Les expressions du premier degré $\frac{A}{\lambda^n}, \ldots, \frac{C'}{\lambda^{n-1}}$ représentent des longueurs que nous savons construire (2°). En désignant ces longueurs par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, on a

$$x = \frac{\lambda(\alpha + \beta - \gamma)}{\alpha' + \beta' - \gamma'};$$

de sorte qu'on est ramené à construire la quatrième proportionnelle aux trois longueurs connues : $\alpha' + \beta' - \gamma'$, $\lambda$ et $\alpha + \beta - \gamma$.

4° Toute expression *rationnelle et homogène du premier degré* est une somme algébrique d'expressions analogues à la précédente ; donc on pourra la construire.

164. Remarque. — Si les monomes A, B, C sont de degré $n+p$ et les monomes A′, B′, C′ de degré $n$, en désignant tou-

jours par $\lambda$ une longueur arbitraire, on pourra construire une longueur $x$ telle que

$$\lambda^{p-1}x = \frac{A + B - C}{A' + B' - C'};$$

car, en écrivant cette égalité sous la forme

$$x = \frac{A + B - C}{\lambda^{p-1}(A' + B' - C')},$$

on est ramené au cas précédent.

## EXERCICES

1. Les médianes d'un triangle se coupent en un même point qui est au tiers de chacune d'elles à partir du côté opposé.

— Soient AA', BB' deux médianes d'un triangle ABC, O leur point de rencontre ; A'B' est parallèle à AB et égal à $\frac{AB}{2}$. Donc $\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$; OA' est la moitié de OA, etc.

2. Soient A, B, C et A', B', C' les points de rencontre de trois parallèles avec deux sécantes quelconques ; démontrer que

$$\overline{AA'}.\overline{BC} + \overline{BB'}.\overline{CA} + \overline{CC'}.\overline{AB} = 0.$$

— En effet, si M est le point de rencontre de CC' avec AB', on a

$$\overline{CC'} = \overline{CM} + \overline{MC'} = \overline{BB'}.\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} + \overline{AA'}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}.$$

Si l'on pose $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$, on a

$$(\alpha + \beta)\,\overline{CC'} = \alpha.\overline{AA'} + \beta.\overline{BB'}.$$

En outre, si O est un point quelconque du plan, on a

$$(\alpha + \beta) \text{ vec OC} = \alpha.\text{vec OA} + \beta.\text{vec OB}.$$

Car, soit D le point de rencontre de OA avec la parallèle à OB menée par C, on a

$$\text{vec OC} = \text{vec OD} + \text{vec DC} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\text{ vec OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\text{vec OB}.$$

3. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$, des points d'un plan et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, autant de nombres correspondants. Prenons sur $A_1A_2$ un point $G_1$ tel que

$$\alpha_1 . \overline{G_1A_1} + \alpha_2 . \overline{G_1A_2} = 0 ;$$

puis sur $G_1A_3$ un point $G_2$, tel que

$$(\alpha_1 + \alpha_2) . \overline{G_2G_1} + \alpha_3 . \overline{G_2A_3} = 0 ;$$

puis sur $G_2A_4$ un point $G_3$, tel que

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) . \overline{G_3G_2} + \alpha_4 . \overline{G_3A_4} = 0 ;$$

et ainsi de suite ; nous arriverons finalement à un dernier point $G_{n-1}$, que nous désignerons par G, et qu'on appelle *le centre des distances proportionnelles* des points $(A, \alpha)$.

Soient $A'_1, A'_2, \ldots, G'$, les projections de $A_1, A_2, \ldots$, G sur un même axe, et soit O un point quelconque du plan. Si l'on pose

$$\Sigma\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\Sigma\alpha\overline{AA'} = \alpha_1 . \overline{A_1A'_1} + \alpha_2 . \overline{A_2A'_2} + \ldots + \alpha_n . \overline{A_nA'_n},$$

$$\Sigma\alpha \text{ vec OA} = \alpha_1 . \text{vec OA}_1 + \alpha_2 . \text{ vec OA}_2 + \ldots + \alpha_n . \text{ vec OA}_n,$$

on a

$$\overline{GG'} . \Sigma\alpha = \Sigma\alpha . \overline{AA'},$$

$$\text{vec OG} . \Sigma\alpha = \Sigma\alpha \text{ vec OA}.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, le point G prend le nom de *centre des moyennes distances*. Dans ce cas, $\overline{GG'}$ est la moyenne arithmétique de $\overline{A_1A'_1}, \overline{A_2A'_2}, \ldots$ et le vecteur OG est la moyenne arithmétique des vecteurs $OA_1, OA_2, \ldots$

4. Le centre des moyennes distances des trois sommets d'un triangle s'appelle le *centre de gravité* du triangle ; il coïncide avec le point de concours des médianes.

5. Les centres de gravité de deux triangles ABC, A'B'C' coïncident quand la somme des trois vecteurs AA', BB', CC' est nulle.

6. Dans un triangle ABC, par le sommet B et le milieu O de la médiane AD on mène une droite rencontrant le côté AC en un point E ; quelles sont les valeurs des rapports $\frac{EA}{EC}$ et $\frac{OB}{OE}$ ?

7. Si, dans l'énoncé précédent, on suppose que le point D est un point quelconque du côté BC, prouver que $\frac{EA}{EC} = \frac{BD}{BC}$.

8. Dans un triangle ABC, le produit des distances des sommets B et C à la bissectrice de l'angle A est égal au produit de la distance de cette bissectrice au milieu de BC par la bissectrice extérieure.

Même théorème pour la bissectrice extérieure.

9. Mener à un cercle une tangente telle que les perpendiculaires abaissées de deux points donnés sur cette tangente soient entre elles comme deux nombres donnés $m$ et $n$.

10. Par un point P pris dans le plan d'un cercle O, on mène une droite rencontrant ce cercle en A et B, et on prend le point B' symétrique à B par rapport au diamètre PO. Prouver que la droite AB' passe par un point fixe indépendant de la direction de la sécante PAB.

11. Par un point commun à deux cercles, mener une sécante telle que les cordes interceptées par les deux cercles sur cette sécante soient dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

12. Construire un triangle, connaissant un angle, un côté et le rapport des deux autres côtés.

13. Construire un trapèze, connaissant les deux bases, le rapport des deux autres côtés et la hauteur.

14. Construire un trapèze, connaissant un angle, les deux côtés non parallèles et le rapport des bases.

15. Mener par deux points donnés deux parallèles qui fassent avec deux autres parallèles données un parallélogramme dont les côtés soient proportionnels à deux longueurs données.

16. Lieu des points dont les distances à deux cercles donnés soient proportionnelles aux rayons de ces deux cercles.

17. Les milieux des bases d'un trapèze, le point de rencontre des diagonales et celui des côtés non parallèles sont en ligne droite.

---

## CHAPITRE III

## FIGURES HOMOTHÉTIQUES

165. On dit que deux figures F, F' sont *homothétiques* (fig. 157), quand il existe un point fixe S et un nombre constant $k$ tels qu'on puisse faire correspondre les points des deux figures, chacun à chacun, de façon que deux

points correspondants quelconques, M et M′, soient en ligne droite avec le point S et vérifient la relation

$$\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = k.$$

Le point S s'appelle le *centre d'homothétie* des deux figures, et $k$ le *rapport d'homothétie*.

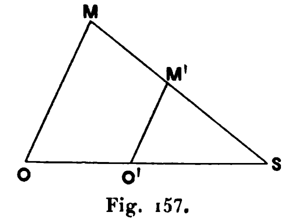


Fig. 157.

On dit que l'homothétie est *directe* quand le rapport $k$ est positif, *inverse* quand il est négatif. Dans le premier cas, SM et SM′ sont de même sens; dans le second, ils sont de sens contraires.

Deux points correspondants sont dits *homologues*. De même, on dit que deux vecteurs OM, O′M′ (fig. 157), sont *homologues* quand leurs origines et leurs extrémités sont des points homologues, que deux angles sont *homologues* quand leurs côtés sont homologues, etc.

166. **Théorème.** — *Deux vecteurs homologues* OM, O′M′ *sont parallèles et dans le rapport* $k$.

En effet, on a, par hypothèse,

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = k. \qquad (1)$$

Donc [153] OM et O′M′ sont parallèles et, par suite [152],

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = k.$$

Si les vecteurs OM, O′M′ sont portés par une même

droite (fig. 158), le théorème subsiste ; car alors on déduit des égalités (1)

$$k = \frac{\overline{SM'} - \overline{SO'}}{\overline{SM} - \overline{SO}} = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}}.$$

M O M' O' S

Fig. 158.

Corollaires. — I. — *Si trois points de la première figure sont en ligne droite, leurs homologues dans la seconde figure le sont aussi.*

Donc *la figure homothétique d'une droite est une droite parallèle.*

En particulier, *la figure homothétique d'une droite qui passe par le centre* S *est cette droite elle-même.*

II. — *L'angle de deux vecteurs est égal à celui de leurs homologues.*

III. — *Deux triangles* ABC, A′B′C′ (fig. 159), *dont les côtés sont parallèles chacun à chacun, sont homothétiques.*

En effet, construisons la figure homothétique de ABC, en prenant pour centre d'homothétie le point de rencontre S de AA′ et de BB′, et pour rapport d'homothétie $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ ou $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$ : A′ sera l'homologue de A et B′ l'homologue de B. Soit C″ l'homologue de C : la droite A′C″ sera parallèle à AC et, par suite, se confondra avec A′C′ ; de même, B′C″ se confondra avec B′C′. Donc C″ se confondra avec C′.

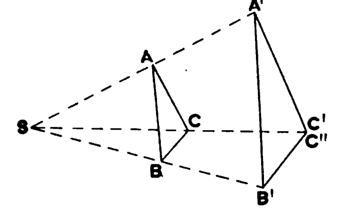



Fig. 159.

IV. — *La figure homothétique d'un polygone est un polygone ; les côtés homologues de ces deux polygones sont parallèles et proportionnels et leurs angles homologues sont égaux.*

V. — *Les tangentes en deux points homologues de deux courbes homothétiques sont parallèles.*

Car, soient M et N, deux points infiniment voisins de la première courbe, M′ et N′, les points homologues de la seconde ; les sécantes MN, M′N′ étant parallèles, les tangentes en M et en M′, qui sont les limites de ces sécantes, le sont aussi.

VI. — *La figure homothétique d'une circonférence est une circonférence : les centres de ces deux circonférences sont des points homologues et leurs rayons sont dans le rapport k.* En effet, si M (fig. 157) décrit une circonférence de centre O, son homologue décrit une circonférence de centre O′; car, si OM est constant, O′M′ l'est aussi.

En général, quand deux courbes sont homothétiques, si l'une a un centre, l'autre en a aussi un.

167. **Théorème.** — *Pour que deux figures* F *et* F′ *soient homothétiques, il faut et il suffit qu'il existe deux points fixes* O *et* O′ *tels qu'on puisse faire correspondre les points des deux figures, chacun à chacun, de façon que les vecteurs* OM, O′M′, *qui joignent ces deux points fixes à deux points correspondants quelconques* M, M′, *soient parallèles et dans un rapport constant.*

La condition est *nécessaire* [166].

Elle est *suffisante.* Car, si elle est remplie, soit $k$ la valeur constante du rapport $\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}}$, que nous supposons *différent de* $+1$, et soit S (fig. 157), le point de rencontre de MM′ avec OO′ ; on a [152]

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k.$$

Donc le point S est fixe et, comme $\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k$, les deux figures sont homothétiques.

Il peut arriver que OM et O'M' soient portés par une même droite. Dans ce cas, on peut écrire

$$k = \frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{SO'} + \overline{O'M'}}{\overline{SO} + \overline{OM}} = \frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}}.$$

Donc $\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}}$ est encore égal à $k$.

Si maintenant $k = +1$, le vecteur MM' est *équipollent* à OO'; donc on peut amener la figure F sur la figure F par une translation $\overline{OO'}$ et ces deux figures sont *directement superposables*. On peut encore dire qu'elles sont homothétiques, mais que le centre d'homothétie S est à l'infini.

Corollaires. — I. — *Deux cercles* O *et* O' (fig. 160) *peuvent être considérés soit comme directement homothétiques*, si on fait correspondre les extrémités M et M' de deux rayons OM, O'M'', parallèles et de même sens, *soit comme inversement homothétiques*, si on fait correspondre les extrémités M et M'' de deux rayons OM, O'M'', parallèles et de sens contraires.

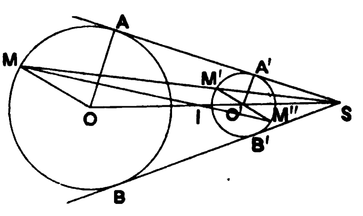


Fig. 160.

Les deux centres d'homothétie directe ou inverse, S, I, sont à l'intersection de la droite des centres OO' avec les droites MM', MM'' qui joignent les extrémités de deux rayons parallèles, de même sens ou de sens contraires.

En désignant les rayons par R et R′, ces deux points S et I sont définis par les relations

$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}} = +\frac{R'}{R}, \quad \frac{\overline{IO'}}{\overline{IO}} = -\frac{R'}{R}.$$

Il n'y a pas d'autre centre d'homothétie [166, VI].

Les tangentes communes extérieures AA′, BB′ passent par le centre S d'homothétie directe; car les rayons OA, O′A′ qui aboutissent aux points de contact sont parallèles et de même sens. De même, les tangentes communes intérieures passent par le centre I d'homothétie inverse. — Il en résulte une nouvelle méthode pour construire les tangentes communes à deux cercles : on construit directement les deux points S et I : les tangentes à l'un des deux cercles menés par ces deux points sont les tangentes communes demandées.

II. — *Deux figures* F′, F″ *homothétiques à une troisième figure* F *sont homothétiques entre elles et les centres d'homothétie de ces trois figures considérées deux à deux sont en ligne droite.*

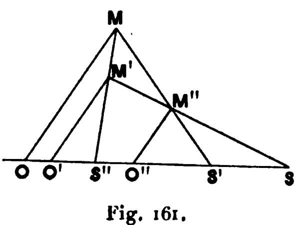


Fig. 161.

Soient S″ (fig. 161) le centre et $k''$ le rapport d'homothétie des figures F′ et F ; S′ le centre et $k'$ le rapport d'homothétie des figures F″ et F ; M, un point quelconque de F et M′, M″, ses homologues dans F′, F″. Prenons sur la droite S′S″, un point arbitraire O et deux autres points O′, O″ tels que

$$\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}} = \frac{\overline{S''M'}}{\overline{S''M}} = k'', \quad \frac{\overline{S'O''}}{\overline{S'O}} = \frac{\overline{S'M''}}{\overline{S'M}} = k'.$$

Nous savons [166] que les vecteurs O′M′, O″M″ sont paral-

lèles à OM, par conséquent parallèles entre eux, et que

$$\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}} = k'', \quad \frac{\overline{O''M''}}{\overline{OM}} = k' ;$$

d'où $\dfrac{\overline{O'M'}}{\overline{O''M''}} = \dfrac{k''}{k'}$; donc les vecteurs O'M', O''M'' étant parallèles et dans le rapport constant $\dfrac{k''}{k'}$, les deux figures F', F'' sont homothétiques; leur rapport d'homothétie est $\dfrac{k''}{k'}$ et leur centre d'homothétie S est à l'intersection de M'M'' avec O'O'' : il est donc sur la droite O'O'', c'est-à-dire sur la droite S'S''.

D'ailleurs les trois rapports d'homothétie $k'$, $k''$, $\dfrac{k'}{k''}$ sont évidemment ou tous trois positifs, ou deux négatifs et un positif. Donc les trois centres d'homothétie S, S', S'' sont ou tous trois directs, ou deux inverses et un direct.

168. Cas particulier. — Si $k' = k''$, les vecteurs O'M', O''M'' sont équipollents; donc M'M'' et O'O'' le sont aussi et on peut amener la figure F' sur la figure F'' par une translation $\overline{O'O''}$. Par conséquent,

*La figure homothétique d'une figure donnée ne fait que se déplacer parallèlement à elle-même, quand on change le centre d'homothétie en conservant le rapport d'homothétie.*

169. Trois cercles considérés deux à deux ont trois centres d'homothétie directe et trois centres d'homothétie inverse. Les trois centres d'homothétie directe sont sur une même droite qu'on nomme *l'axe d'homothétie directe;* deux centres d'homothétie inverse et un centre d'homothétie directe sont sur une même droite qu'on nomme *axe d'homothétie inverse.* Il y a donc *un* axe d'homothétie directe et *trois* axes d'homothétie inverse.

EXERCICES

1. Si deux figures à centre sont directement homothétiques, elles sont aussi inversement homothétiques.

2. Inscrire un carré à un demi-cercle.

3. Inscrire à un cercle un triangle isoscèle, connaissant la somme de la base et de la hauteur. Discussion.

4. Etant données trois droites issues d'un même point, mener par un point donné une sécante telle que les segments interceptés par les trois droites sur cette sécante soient dans un rapport donné.

— On commencera par résoudre le problème en supposant le point donné sur l'une des trois droites.

5. Mener une parallèle à la base d'un triangle, telle que le segment intercepté sur cette parallèle par les deux autres côtés soit vu d'un point donné sous un angle droit.

6. Inscrire un carré à un triangle donné.

7. Inscrire à un triangle donné un triangle dont les côtés soient parallèles à trois droites données.

8. Par le point de contact A de deux cercles tangents extérieurement, on mène dans ces deux cercles deux cordes rectangulaires AB, AB'. Prouver que la droite BB' passe par un point fixe et trouver le lieu de la projection du point A sur cette droite.

9. Tracer un cercle passant par un point donné et tangent à deux droites données.

— On déterminera les points de contact en considérant le cercle cherché comme homothétique à n'importe quel cercle tangent aux deux droites.

10. Construire un triangle, connaissant : 1° un angle ; 2° le rapport de deux côtés ; 3° une hauteur, ou une médiane, ou une bissectrice, ou le périmètre, etc.

— On construira d'abord un triangle satisfaisant aux deux premières conditions, puis un triangle homothétique à celui-là et satisfaisant à la troisième condition.

11. Étant donné un triangle ABC, on prend sur BC deux points E et F symétriques par rapport au milieu de BC et on mène par ces deux points des parallèles à AB et AC, de manière à former un parallélogramme ayant pour diagonale EF. Prouver que l'autre diagonale passe par A.

12. Couper un triangle ABC par une sécante rencontrant les deux côtés AB, AC en des points D, E tels que AD = DE = EC.

— Les triangles ADE, DEC étant isoscèles, on connaît la direction de DE, par suite, celle de DC.

13. Trouver le lieu des points dont les distances à deux droites données soient dans un rapport donné. — Deux droites.

14. Trouver dans le plan d'un triangle un point dont les distances aux trois côtés soient proportionnelles à trois longueurs données.

---

## CHAPITRE IV

## FIGURES SEMBLABLES

170. On dit que deux figures F, F′ sont *semblables*, quand l'une d'elles est égale à une homothétique de l'autre, c'est-à-dire quand on peut placer ces deux figures de manière qu'elles soient homothétiques.

On appelle *homologues* les éléments de ces deux figures qui deviennent homologues quand les deux figures sont placées de manière à être homothétiques.

Quand nous nommerons deux polygones semblables, nous aurons soin d'énoncer les sommets homologues dans le même ordre; ainsi, quand nous dirons que deux triangles ABC, A′B′C′ sont semblables, cela voudra dire qu'ils peuvent être placés de manière à être homothétiques, A′ étant l'homologue de A, B′ l'homologue de B et C′ celui de C.

Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles semblables, les côtés homologues sont opposés à des sommets homologues.

171. *Dans deux figures semblables*,

1° *Les angles homologues sont égaux* [166, II] ;

2° *Le rapport des longueurs de deux vecteurs homologues est constant* [166] et s'appelle *le rapport de similitude des deux figures ;*

3° *Deux triangles homologues*, c'est-à-dire ayant pour sommets des points homologues des deux figures, *sont semblables ;* car ils deviennent évidemment homothétiques en même temps que les deux figures.

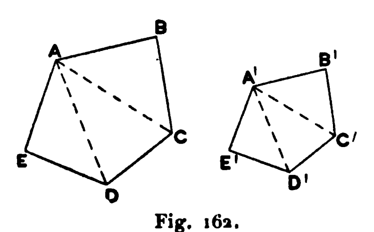


Fig. 162.

En particulier, étant donnés deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 162), si on décompose le premier polygone en triangles ABC, ACD, ADE d'une façon quelconque, ces triangles sont respectivement semblables aux triangles homologues A'B'C', A'C'D', A'D'E' qui composent le second polygone.

172. *Deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles* [167, II].

173. On dit que deux figures F, F', situées dans un même plan, sont *directement semblables* quand on peut les amener à être homothétiques *sans les faire sortir du plan*, *inversement semblables* quand, pour les amener à être homothétiques, *il faut retourner l'une d'elles.*

Soient A, B, C,... des points de F et A', B', C',... les points homologues de F'.

Si F et F' sont *directement* semblables, on peut amener l'angle BAC à coïncider avec B'A'C', sans le faire sortir du plan, de façon que AB s'applique sur A'B' et AC sur A'C'. Donc

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'B'}, \overline{A'C'});$$

d'où

$$(\overline{AB}, \overline{A'B'}) + (\overline{A'B'}, \overline{AC}) = (\overline{A'B'}, \overline{AC}) + (\overline{AC}, \overline{A'C'}) + 360\,k.$$

Donc $(\overline{AB}, \overline{A'B'}) = (\overline{AC}, \overline{A'C'})$; c'est-à-dire que,

*Dans deux figures directement semblables, l'angle de deux vecteurs homologues est constant.*

Si, au contraire, F et F' sont inversement semblables, il faudrait retourner l'angle $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'})$, pour pouvoir l'amener à coïncider avec $(\overline{AB}, \overline{AC})$; on en conclut que

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'C'}, \overline{A'B'}).$$

Menons par un point O du plan quatre vecteurs $O\beta$, $O\gamma$, $O\beta'$, $O\gamma'$ respectivement équipollents à AB, AC, A'B', A'C', et soit OX la bissectrice de l'angle $\beta O \beta'$. Plions la figure autour de OX : le vecteur $O\beta'$ vient s'appliquer sur $O\beta$ et l'angle $(\overline{O\beta'}, \overline{O\gamma'})$ sur l'angle $(\overline{O\beta}, \overline{O\gamma})$ ; donc $O\gamma'$ vient s'appliquer sur $O\gamma$. On en conclut que OX est aussi la bissectrice de l'angle $\gamma O \gamma'$ ou celle de l'angle opposé par le sommet à $\gamma O \gamma'$.

D'où ce théorème :

*Dans deux figures inversement semblables, la bissectrice de l'angle formé par deux vecteurs homologues quelconques est parallèle à une droite fixe.*

174. **Théorème.** — *Pour que deux triangles* ABC, A'B'C', *soient directement semblables, il faut et il suffit que*

$$(AB, AC) = (A'B', A'C') \quad \text{et} \quad (AB, BC) = (A'B', B'C').$$

D'après ce qu'on vient de voir, ces conditions sont *nécessaires.*

Elles sont *suffisantes.* En effet, supposons qu'elles soient vérifiées; déplaçons le triangle A'B'C' dans le plan de manière que A'B' devienne parallèle à AB. Alors, comme les angles (AB, AC), (A'B', A'C') sont égaux, les droites AC, A'C' seront aussi parallèles ; il en sera de même des droites BC, B'C'. Par conséquent, les deux triangles ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun seront devenus homothétiques [166, III]; donc ils étaient directement semblables.

**Théorème.** — *Pour que deux triangles* ABC, A'B'C' *soient inversement semblables, il faut et il suffit que*

$$(AB, AC) = (A'C', A'B') \quad \text{et} \quad (AB, BC) = (B'C', A'B').$$

Car, en retournant l'un des triangles, on est ramené au cas précédent.

175. **Théorème.** — *Si deux vecteurs homologues* AB, A'B' *de deux figures directement semblables* F, F' *sont parallèles, ces deux figures sont homothétiques.*

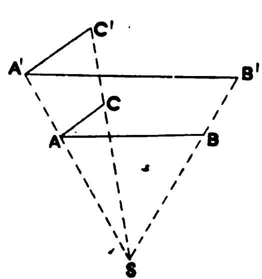



Fig. 163.

En effet, soient (fig. 163) C et C' deux points homologues quelconques. On a

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'B'}, \overline{A'C'})\ ;$$

comme AB et A'B' sont parallèles, AC et A'C' sont aussi parallèles, de même sens ou de sens contraires, selon que AB et A'B' sont de même sens ou de sens contraires. Donc les rapports $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$ ont le même signe, et, comme ils ont la même valeur absolue à cause de la similitude des deux figures, ils sont égaux. Ainsi les vecteurs A'C', AC sont parallèles et dans un rapport constant $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ ; donc [167] les deux figures sont homothétiques. Le centre d'homothétie S est à la rencontre de AA' et de BB'.

176. **Théorème.** — *Deux figures* ABCD...L, A'B'C'D'...L' (fig. 163), *sont directement semblables quand les triangles* ABC, ABD,... ABL *sont respectivement et directement semblables aux triangles* A'B'C', A'B'D',...A'B'L'.

En effet, déplaçons la seconde figure dans le plan de manière que A'B' devienne parallèle à AB; à ce moment [175], les triangles A'B'C', A'B'D',... A'B'L' seront devenus homothétiques aux triangles ABC, ABD,... ABL par rapport au point de rencontre S de AA' avec BB', le rapport d'homothétie étant le même pour tous ces triangles, savoir $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$. Par conséquent, les figures ABCD...L, A'B'C'D'...L', seront devenues homothétiques; donc elles étaient directement semblables.

177. *Si les triangles* ABC, ABD,.. ABL, *sont respectivement et inversement semblables aux triangles* A'B'C', A'B'D',..., A'B'L' *les deux figures* ABCD...L, A'B'C'D'...L', *sont inversement semblables* ; car, en retournant l'une d'elles, on est ramené au cas précédent.

178. On démontre de même que *deux polygones* ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 162) *sont directement ou inversement semblables selon que les triangles* ABC, ACD, ADE *qui composent le premier polygone sont directement ou inversement semblables aux triangles* A'B'C', A'C'D', A'DE'' *qui composent le second.*

179. On appelle *point double* de deux figures semblables situées dans un même plan un point qui coïncide avec son homologue; *droite double,* une droite qui coïncide avec son homologue.

1° Soient F, F' deux figures directement semblables; A et A', B et B' (fig. 164), deux couples de points homologues; R le point de rencontre de AB et de A'B'. Si O est un point double, en exprimant que les triangles ABO, A'B'O sont directement semblables, on a [174]

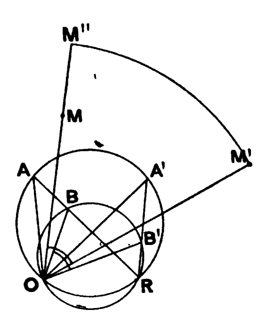


Fig. 164.

(AB, AO) = (A'B', A'O), (AB, BO) = (A'B', B'O),

ou

(AR, AO), = (A'R, A'O), (BR, BO) = (B'R, B'O) :

ce qui prouve [112] que O est un point commun aux circonférences circonscrites aux triangles RAA', RBB'. Ces deux circonférences, qui ont déjà un point commun R, se rencontrent en un second point O, qui est effectivement un point double parce qu'il vérifie les égalités précédentes. Donc

*Deux figures directement semblables ont un point double et un seul.*

Soit M un point quelconque de F; son homologue M′ dans la figure F′ est défini par les deux égalités

$$(\overline{OM}, \overline{OM'}) = (\overline{OA}, \overline{OA'}),$$

$$\frac{OM'}{OM} = k \quad \text{ou} \quad OM' = k.OM,$$

$k$ désignant le rapport de similitude. Donc la figure F′ n'est autre que la figure F qu'on a fait tourner autour de O de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OA'})$ après avoir multiplié par $k$ tous les vecteurs issus de O.

Il peut arriver que AB et A′B′ soient parallèles (fig. 163); alors F et F′ sont homothétiques [175], le centre d'homothétie S est le point double et toutes les droites passant par ce point sont des droites doubles.

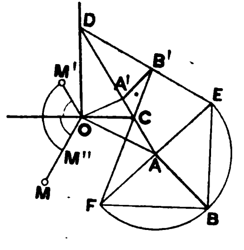


Fig. 165.

2° Considérons deux figures F, F′ inversement semblables; soient (fig. 165) A et A′, B et B′ deux couples de points homologues. Si O est un point double, les triangles OAB, OA′B′ sont inversement semblables; donc les bissectrices OC, OD, des angles formés par OA et OA′ sont parallèles à celles des angles formés par AB et A′B′ et elles rencontrent AA′ en des points C et D tels que

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{DA}{DA'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Pour construire du même coup les points C et D et les directions des bissectrices OC et OD, prenons, sur la parallèle à A′B′ menée par A, deux longueurs AE, AF égales à AB. Si AE est de même sens que A′B′, la bissectrice OC de l'angle AOA sera parallèle à celle de l'angle BAE, par suite, parallèle à BF; l'autre bissectrice OD sera parallèle à BE. On mènera B′F et B′E, qui couperont AA′ aux points C et D; et, en menant par ces deux points les parallèles à BF et à BE, on aura le point double O.

Soient M et M′ deux points homologues quelconques des

deux figures F et F'; OC est bissectrice de l'angle MOM' et $\frac{OM'}{OM}$ est égal au rapport de similitude $k$, d'où $OM' = k.OM$. Donc la figure F' n'est autre que la figure F qu'on a *retournée* en la faisant tourner autour de OC, après avoir multiplié par $k$ tous les vecteurs issus de O. Les droites OC et OD sont des droites doubles, car elles sont évidemment à elles-mêmes leurs homologues.

### CAS DE SIMILITUDE

180. La similitude de deux triangles ABC, A'B'C', implique cinq conditions :

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Nous allons voir que deux de ces conditions convenablement choisies entraînent les trois autres.

***Théorème.*** — *Deux triangles* ABC, A'B'C' (fig. 166) *sont semblables :*

1° *Quand ils ont deux angles égaux chacun à chacun :*

$$A = A', \quad B = B';$$



Fig. 166.

2° *Quand ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels :*

$$A = A', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC};$$

3° *Quand ils ont les trois côtés proportionnels :*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Prenons sur AB une longueur AB'' égale à A'B' et

menons par B″ la parallèle à BC, qui rencontre AC en C″. Comme $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC}$, le triangle AB″C″ est évidemment homothétique au triangle ABC par rapport au point A, le rapport d'homothétie étant $\frac{AB''}{AB}$. Il suffit donc de prouver que le triangle A′B′C′ est égal à AB″C″.

En effet :

1° Supposons que les triangles ABC, A′B′C′ aient deux angles égaux chacun : A = A′, B = B′ ; comme les angles correspondants B et B″ sont égaux, on en déduit B′ = B″. Donc les triangles A′B′C′, AB″C″ sont égaux comme ayant un côté égal : AB″ = A′B′, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

2° Supposons que les deux triangles ABC, A′B′C′ aient un angle égal : A = A′, compris entre côtés proportionnels :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Mais on a aussi [152]

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC}.$$

Comme A′B′ = AB″, on en conclut que $\frac{A'C'}{AC} = \frac{AC''}{AC}$, d'où A′C′ = AC″. Donc les triangles A′B′C′ et AB″C″ sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

3° Supposons que les triangles ABC, A′B′C′ aient les trois côtés proportionnels :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Mais on a aussi [152]

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC};$$

comme A′B′ = AB″, on en conclut que

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{AC''}{AC}, \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{BC};$$

d'où A′C′ = AC″, B′C′ = B″C″. Donc les triangles A′B′C′, AB″C″ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

181. Corollaires. — I. — *Deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont un angle aigu égal* [1°].

II. — *Deux triangles isoscèles sont semblables quand ils ont même angle au sommet* [2°], *ou mêmes angles à la base* [1°].

III. — *Deux triangles sont semblables quand ils ont les côtés parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun ;* car nous avons vu [53, IV] que, dans les deux cas, les deux triangles ont les mêmes angles. — Les côtés parallèles ou perpendiculaires sont homologues.

182. Deux triangles dont les côtés sont perpendiculaires chacun à chacun sont *directement* semblables ; en effet, pour les rendre homothétiques, il suffit de faire tourner l'un d'eux de 90° autour de l'un de ses sommets, de manière que ses côtés deviennent parallèles à ceux de l'autre [166, III].

EXERCICES.

1. Soient H l'orthocentre, O le centre du cercle circonscrit, A′, B′, C′, les milieux des côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC; démontrer que OA′, OB′, OC′, sont les moitiés de AH, BH, CH. — En effet, les triangles OA′B′, HAB sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles et leur rapport de similitude est $\frac{1}{2}$.

En déduire que le cercle ayant pour centre le milieu de OH et pour rayon la moitié de OA passe par les pieds des hauteurs, par

les milieux des côtés et par les milieux des segments HA, HB, HC. — Ce cercle s'appelle *le cercle des neuf points*.

2. Dans tout triangle (fig. 167), l'orthocentre H, le centre de gravité G, le centre O du cercle circonscrit et le centre $O_9$ du cercle des neuf points forment une division harmonique.

H $O_9$ G O

Fig. 167.

3. Deux triangles rectangles sont semblables quand ils ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels.

4. Trouver le lieu des points d'où l'on voie deux cercles sous des angles égaux. — C'est le cercle ayant pour diamètre la droite qui joint les centres d'homothétie des deux cercles.

5. Circonscrire à un quadrilatère donné *abcd* un quadrilatère ABCD semblable à un quadrilatère donné MNPQ.

— Supposons que les côtés AB, BC, CD, DA passent respectivement par les sommets *b*, *c*, *d*, *a*. Les angles *b*B*c*, *d*D*a* étant égaux aux angles N, Q, on peut construire les cercles circonscrits aux triangles *b*B*c*, *d*D*a*. Soient H et K les points où la diagonale BD rencontre ces deux cercles ; les angles ABD, ADB étant respectivement égaux aux angles MNQ, MQN, on connaît les arcs *b*H, *a*K, etc.

6. Inscrire à un quadrilatère donné, MNPQ, un quadrilatère *mnpq* semblable à un quadrilatère donné *abcd*.

— On commence par circonscrire au quadrilatère *abcd* un quadrilatère ABCD semblable à MNPQ ; on obtient ainsi une figure semblable à la figure cherchée, etc.

7. Si, dans deux triangles ABC, A'B'C', les angles B, B' sont égaux et les angles C, C' supplémentaires, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$.

8. Deux polygones de *n* côtés sont semblables :

1° Quand ils ont les angles égaux chacun à chacun et $n-2$ côtés homologues proportionnels.

2° Quand ils ont $n-1$ côtés proportionnels comprenant $n-2$ angles homologues égaux chacun à chacun.

3° Quand ils ont les côtés proportionnels et $n-3$ angles homologues égaux chacun à chacun. — On démontre aisément que les triangles obtenus en joignant les sommets des trois autres angles ont leurs côtés proportionnels.

9. On considère un triangle OAB de grandeur variable qui pivote autour du point O en restant directement semblable à un triangle donné. Démontrer que, si le point A décrit une ligne quelconque, le point B décrit une ligne semblable. En particulier, si le point A décrit une droite ou un cercle, il en est de même du point B.

10. Soient OX, OY deux droites concourantes ; A, un point fixe de

la première, B, un point fixe de la seconde. On considère deux mobiles M et N qui se déplacent, l'un sur OX, l'autre sur OY, de façon que le rapport des segments $\overline{AM}$ et $\overline{BN}$ reste constant et on construit sur MN un triangle MNP directement semblable à un triangle donné :

1° Le second point de rencontre I des cercles circonscrits aux triangles OAB, OMN est fixe.

2° Les triangles IAB, IMN sont directement semblables. Donc MN est vu du point I sous un angle constaut.

3° Le lieu du point P est une droite. En particulier, le lieu du milieu de MN, plus généralement, le lieu du point qui divise MN dans un rapport donné est une droite. Il en est de même du lieu de la projection de I sur MN.

4° Déterminer les points M et N de façon que la droite MN soit égale à une longueur donnée, ou parallèle à une droite donnée, ou passe par un point donné.

11. Construire un triangle semblable à un triangle donné ayant un sommet en un point donné et les deux autres sommets sur deux droites ou deux cercles donnés.

12. Construire un triangle équilatéral dont les sommets soient sur trois circonférences concentriques données.

13. Soient A et B les deux points d'intersection de deux cercles ; on mène par A une sécante quelconque rencontrant les deux cercles en M et N, et on construit sur MN un triangle MNP directement semblable à un triangle donné. Démontrer que, quand la sécante tourne autour du point A, le triangle BMN reste directement semblable à lui-même et que le lieu du point P est un cercle. En particulier, le lieu du milieu de MN, plus généralement, le lieu du point qui divise MN dans un rapport donné est un cercle.

14. Si un triangle variable circonscrit à un triangle fixe reste directement semblable à un autre triangle donné, son orthocentre, son centre de gravité, etc., décrivent des circonférences.

15. Trouver le lieu des centres des cercles que l'on voit de deux points donnés sous des angles donnés. — Un cercle.

16. Tracer un cercle qui soit vu de trois points donnés sous des angles donnés.

---

## CHAPITRE V

# PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU TRIANGLE, DU QUADRILATÈRE, DU CERCLE, ETC.

183. ***Théorème.*** — *Dans tout triangle rectangle,*

1° *La hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse ;*

2° *Chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse ;*

3° *Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

Soit ABC (fig. 168) un triangle rectangle en A et AD la hauteur issue du sommet de l'angle droit.

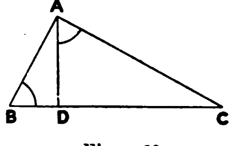


Fig. 168.

1° Les triangles DAB, DCA sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; donc

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DB}{AD}, \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2 = BD \times DC. \qquad (1)$$

2° Les triangles rectangles DBA et ABC sont semblables comme ayant un angle aigu commun ; donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}, \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 = BC \times BD. \qquad (2)$$

On démontre de même que

$$\overline{AC}^2 = BC \times DC. \qquad (3)$$

3° En ajoutant membre à membre les égalités (2) et (3), on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC\,(BD + DC) = \overline{BC}^2. \qquad (4)$$

Remarque. — Les égalités (1) — (4) sont des égalités *numériques*, c'est-à-dire qu'elles ont lieu entre les nombres qui représentent les lignes AB, AC... supposées mesurées avec une même unité. Il importe de remarquer qu'elles subsistent, quelle que soit la ligne prise pour unité.

Corollaires. — I. — *Le rapport des carrés des deux côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse.* Car des égalités (2) et (3), on déduit

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{DC}.$$

Cette propriété permet de remplacer le rapport des carrés de deux lignes données par le rapport de deux lignes, et inversement.

II. — *Les carrés des cordes* AB, AB', AB''... (fig. 169), *issues d'un point* A *d'une circonférence sont entre eux comme les projections de ces cordes sur le diamètre* AC. Car les triangles ABC, AB'C,... sont rectangles comme inscrits à une demi-circonférence.

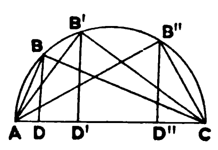


Fig. 169.

184. **Théorème.** — *Dans tout triangle, selon que l'angle opposé à un côté est obtus ou aigu, le carré de ce côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés* PLUS *ou* MOINS *le produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur lui.*

Soient (fig. 170 et 171) ABC un triangle et CD la hauteur issue du sommet C. On a

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2,$$
$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2;$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2. \qquad (1)$$

Mais $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD} = \overline{AD} - \overline{AB}$, d'où

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AB}.\overline{AD} + \overline{AD}^2.$$

En remplaçant dans (1) $\overline{BD}^2$ par cette valeur et en simplifiant, il vient

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}.\overline{AD}. \qquad (2)$$

Si l'angle A est obtus (fig. 170) le pied D de la hau-

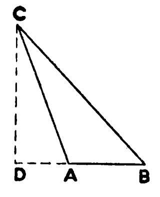


Fig. 170.

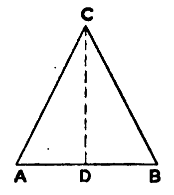


Fig. 171.

teur CD tombe sur le prolongement de BA au delà de A; les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ sont de signes contraires ; donc leur produit est négatif et égal à —AB.AD, de sorte que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\,AB.AD.$$

Si l'angle A est aigu (fig. 171), les points D et B sont du même côté de A ; les vecteurs AB et AD sont de même signe, donc leur produit est positif et on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AB.AD.$$

Si on ne fait pas d'hypothèse sur la nature de l'angle A, il faut se servir de la formule (2), qui subsiste, même dans le cas où l'angle A est droit ; car alors, AD étant nul, elle se réduit à

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Cette formule (2) est encore vraie quand les trois points A, B, C sont en ligne droite ; car alors D se confond avec C et cette formule devient

$$\overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2.$$

Donc elle est absolument générale.

Corollaire. — *Un angle d'un triangle est aigu, droit ou obtus selon que le carré du côté opposé est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.*

185. Problème. — *Connaissant les trois côtés d'un triangle, calculer les trois hauteurs et le rayon du cercle circonscrit.*

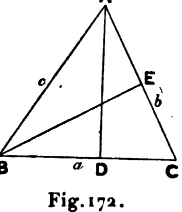


Fig. 172.

Désignons par $a$, $b$, $c$ (fig. 172) les trois côtés BC, CA, AB, et par $h_a$ la hauteur AD issue de A ; on a, dans le triangle rectangle ADC,

$$h_a^2 = b^2 - \overline{CD}^2.$$

Mais

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2a \times \text{CD},$$

d'où

$$\overline{CD}^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 4a^2h_a^2 &= 4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2 \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b). \end{aligned}$$

Désignons par $2p$ le périmètre du triangle :

$$a+b+c = 2p.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} a+b-c &= 2(p-c), \\ a-b+c &= 2(p-b), \\ b+c-a &= 2(p-a). \end{aligned}$$

Par suite,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Les deux autres hauteurs $h_b$, $h_c$ s'en déduisent en remplaçant $\frac{2}{a}$ par $\frac{2}{b}$, ou par $\frac{2}{c}$ ; de sorte qu'en désignant par S le radical $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, on a

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2\mathrm{S}.$$

Nous verrons plus tard que S représente la surface du triangle.

Corollaire. — *Les trois produits obtenus en multipliant chaque côté d'un triangle par la hauteur correspondante sont égaux.*

On peut le démontrer directement en considérant les triangles semblables ADC, BEC obtenus en menant les hauteurs AD, BE :

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{AD} \times \mathrm{BC} = \mathrm{BE} \times \mathrm{AC}.$$

186. Pour calculer le rayon du cercle circonscrit, nous nous appuierons sur le théorème suivant.

***Théorème.*** — *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit par la hauteur correspondant au troisième côté.*

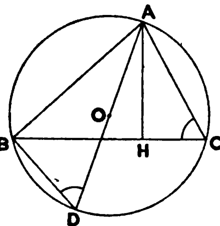


Fig. 173.

En effet, traçons le cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 173), menons le diamètre AD et la hauteur AH. Les triangles rectangles ABD, AHC sont semblables, car ils ont les angles C et D égaux comme ayant même mesure. Donc

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AC}, \quad \text{ou} \quad AB.AC = AD.AH.$$

En désignant par 2R le diamètre AD, l'égalité précédente s'écrit :

$$bc = 2Rh_a\,;$$

d'où, en remplaçant $h_a$ par la valeur $\frac{2S}{a}$ trouvée ci-dessus,

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

187. ***Théorème.*** — 1° *La somme des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le carré de la moitié du troisième côté plus deux fois le carré de la médiane correspondant à ce côté;*

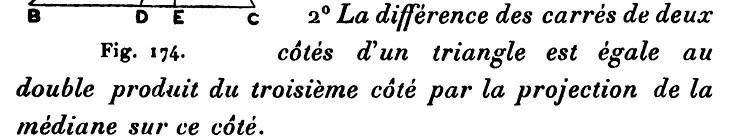


Fig. 174.

2° *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale au double produit du troisième côté par la projection de la médiane sur ce côté.*

Soit (fig. 174) ABC un triangle ; menons la médiane AD et la hauteur AE ; on a, dans tous les cas [184],

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 - 2\overline{DB}.\overline{DE}, \quad (1)$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{DC}.\overline{DE}. \quad (2)$$

Or $\overline{DB} = -\overline{DC}$ ; donc l'égalité (1) peut s'écrire

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{DC}.\overline{DE}. \quad (3)$$

En ajoutant membre à membre les égalités (2) et (3), on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2. \quad (4)$$

En les retranchant membre à membre et en remarquant que $4\overline{DC} = 2\overline{BC}$, on a

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC} \times \overline{DE}. \quad (5)$$

Corollaires. — I. — En désignant la médiane AD par $m$ et les côtés BC, CA, AB par $a$, $b$, $c$, l'égalité (4) peut s'écrire

$$m^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

ce qui donne la valeur de la médiane en fonction des trois côtés.

II. — L'égalité (4) montre que si, dans le triangle ABC, la base BC reste fixe et que le point A varie de telle sorte que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ reste constant, la médiane AD aura une longueur constante. En d'autres termes :

*Le lieu géométrique des points* A, *dont la somme des carrés des distances à deux points fixes* B *et* C *est égale à une quantité donnée* $k^2$, *est une circonférence ayant pour centre le milieu de* BC.

Le rayon $r$ de cette circonférence est défini par l'égalité

$$k^2 = 2r^2 + 2\overline{DC}^2 = 2r^2 + \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

Il faut donc que $k^2 > \frac{\overline{BC}^2}{2}$.

Pour construire cette circonférence, il suffit de remarquer que, si M est un point du lieu situé sur la perpendiculaire au milieu de BC, on a

$$\overline{MB}^2 = \overline{MC}^2 = \frac{k^2}{2}.$$

D'où la construction suivante :

Prenons (fig. 175) sur le prolongement de BC une longueur BE $= k$ ; décrivons une demi-circonférence sur BE comme diamètre et élevons la perpendiculaire au milieu I de BE, qui rencontre cette demi-circonférence en un point F tel que

$$\overline{BF}^2 = BI \times BE = \frac{k^2}{2}.$$

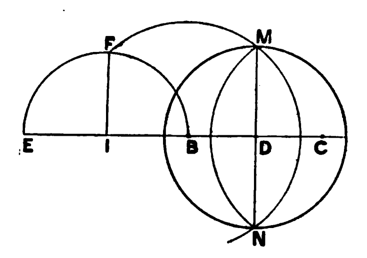



Fig. 175.

Puis, de B et de C comme centres, avec BF pour rayon, décrivons deux cercles, qui se coupent en deux points M et N, qui sont deux points du lieu. Enfin, menons MN, qui rencontre BC en son milieu D, et, de D comme centre, avec DM pour rayon, décrivons un cercle, qui est le lieu cherché.

III. — L'égalité (5) montre que si, BC restant fixe, le point A varie de telle sorte que $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$ reste constant, $\overline{DE}$ sera aussi constant ; donc le point E sera fixe. Par conséquent,

*Le lieu géométrique des points, dont la différence des carrés des distances à deux points fixes* B *et* C *est égale à une quantité donnée* $k^2$, *est une droite perpendiculaire à la droite qui joint les deux points fixes.*

Pour construire cette droite, il suffit de trouver sur BC un point E (fig. 176), tel que

$$\overline{EB}^2 - \overline{EC}^2 = k^2.$$

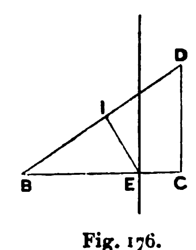


Fig. 176.

Prenons, sur la perpendiculaire à BC menée par C, une longueur CD $= k$; nous aurons aussi

$$\overline{ED}^2 - \overline{EC}^2 = k^2.$$

Donc il faut que EB = ED, c'est-à-dire que le point E est à l'intersection de BC avec la perpendiculaire au milieu de BD. Le point E étant ainsi construit, on mènera par ce point la perpendiculaire à BC, qui sera le lieu demandé.

188. Généralisation. — Supposons (fig. 174) que D soit un point de la droite indéfinie BC, déterminé par l'égalité

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ou} \quad \beta.\overline{DB} + \gamma.\overline{DC} = 0, \qquad (6)$$

$\beta$ et $\gamma$ désignant des nombres donnés positifs ou négatifs. Multiplions les égalités (1) et (2) par $\beta$ et $\gamma$ respectivement et ajoutons; il vient

$$\beta.\overline{AB}^2 + \gamma.\overline{AC}^2 = (\beta+\gamma)\,\overline{AD}^2 + \beta.\overline{DB}^2 + \gamma.\overline{DC}^2. \qquad (7)$$

Or la relation (6) peut s'écrire

$$\frac{\overline{BD}}{\gamma} = \frac{\overline{DC}}{\beta} = \frac{\overline{BC}}{\beta+\gamma};$$

d'où

$$\overline{BD} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\,\overline{BC}, \qquad \overline{DC} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}\,\overline{BC}.$$

En portant ces valeurs de $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ dans la relation (7), il vient

$$\beta.\overline{AB}^2 + \gamma.\overline{AC}^2 = (\beta+\gamma)\,\overline{AD}^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\,\overline{BC}^2. \tag{8}$$

On en conclut que, si B et C sont deux points fixes, *le lieu des points* A *tels que* $\beta.\overline{AB}^2 + \gamma.\overline{AC}^2$ *soit égal à une quantité donnée* $\lambda$ *est la circonférence dont le centre est le point* D *de la droite* BC *défini par* (6) *et dont le rayon* DA *est défini par* (8). En particulier, si l'on fait

$$\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{\gamma}{\beta} = k^2,$$

on voit que le lieu des points A tels que

$$\beta.\overline{AB}^2 + \gamma.\overline{AC}^2 = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{AB}{AC} = k,$$

est la circonférence dont le centre est le point D de la droite BC défini par

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = k^2$$

et dont le rayon DA est défini par l'égalité

$$(\beta+\gamma)\overline{DA}^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\,\overline{BC}^2 = 0,$$

ou

$$AD = \frac{k}{1-k^2}\,BC.$$

189. Ajoutons les égalités (1) et (2) après avoir multiplié la première par $\overline{DC}$ et la seconde par $\overline{BD}$ ou $-\overline{DB}$ ; il vient

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2.\overline{DC} + \overline{AC}^2.\overline{BD} &= \overline{AD}^2(\overline{BD}+\overline{DC}) + \overline{BD}^2.\overline{DC} + \overline{DC}^2.\overline{BD}\\ &= \overline{AD}^2(\overline{BD}+\overline{DC}) + \overline{BD}.\overline{DC}(\overline{BD}+\overline{DC}),\end{aligned}$$

ou

$$\overline{AB}^2.\overline{DC} + \overline{AC}^2.\overline{BD} = \overline{AD}^2.\overline{BC} + \overline{BD}.\overline{DC}.\overline{BC}, \tag{9}$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$\overline{AB}^2 . \overline{CD} + \overline{AC}^2 . \overline{DB} + \overline{AD}^2 . \overline{BC} + \overline{CD} . \overline{DB} . \overline{BC} = 0. \quad (10)$$

C'est la formule de Stewart, que nous avons déjà rencontrée [p. 123, ex. 1] dans le cas particulier où le point A est en ligne droite avec les trois autres. D'ailleurs, on peut ramener le cas général à ce cas particulier.

En effet, si E est la projection de A sur la droite BCD (fig. 174), l'expression

$$\overline{AB}^2 . \overline{CD} + \overline{AC}^2 . \overline{DB} + \overline{AD}^2 . \overline{BC},$$

est égale à

$$\overline{AE}^2 (\overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC}) + \overline{EB}^2 . \overline{CD} + \overline{EC}^2 . \overline{DB} + \overline{ED}^2 . \overline{BC}.$$

Comme $\overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC} = 0$, si la formule de Stewart est démontrée pour les quatre points en ligne droite E, B, C, D, elle le sera aussi pour les quatre points A, B, C, D, quelle que soit la position de A.

190. Si on suppose (fig. 174) que AD est la bissectrice intérieure de l'angle A, on a [156]

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{AB}{AC}, \quad (11)$$

$$\frac{\overline{BD}}{AB} = \frac{\overline{DC}}{AC} = \frac{\overline{BD} + \overline{DC}}{AB + AC} = \frac{\overline{BC}}{AB + AC};$$

d'où

$$\overline{BD} = \overline{BC} . \frac{AB}{AB + AC}, \quad \overline{DC} = \overline{BC} . \frac{AC}{AB + AC}. \quad (12)$$

En substituant ces valeurs dans le *premier* membre de l'égalité (9), et divisant par $\overline{BC}$, cette égalité devient

$$\frac{\overline{AB}^2 . AC + \overline{AC}^2 . AB}{AB + AC} = \overline{AD}^2 + \overline{BD} . \overline{DC}.$$

Mais

$$\overline{AB}^2 . AC + \overline{AC}^2 . AB = AB . AC (AB + AC);$$

donc, en simplifiant, on a

$$AB . AC = \overline{AD}^2 + \overline{BD} . \overline{DC}. \quad (13)$$

Donc *le produit de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la bissectrice intérieure de leur angle, plus le produit des segments que cette bissectrice détermine sur le troisième côté.*

En remplaçant ensuite $\overline{BD}$ et $\overline{DC}$ par leurs valeurs (12) dans le second membre de (13), il vient, en désignant les côtés BC, CA, AB par $a$, $b$, $c$ et la bissectrice AD par $\alpha$,

$$bc = \alpha^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2};$$

d'où on tire, en employant les notations du n° 185,

$$\alpha = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}$$
$$= \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}. \tag{14}$$

Si maintenant on suppose que AD est la bissectrice extérieure de l'angle A (fig. 177), on a [156]

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC},$$

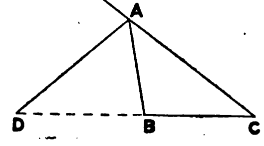


Fig. 177.

égalité qui ne diffère de (11) que par le changement de AB en — AB ou de $c$ en $-c$. Par conséquent, on a, au lieu des égalités (13) et (14) :

$$-AB.AC = \overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{DC}, \tag{15}$$

$$\alpha' = \frac{1}{|b-c|}\sqrt{-bc(a+b-c)(b-c-a)},$$

ou

$$\alpha' = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)},$$

$\alpha'$ désignant la longueur de la bissectrice extérieure.

Dans la formule (15), $\overline{BD}.\overline{DC}$ est négatif et égal à —DB. DC; donc

$$AB.AC = DB.DC - \overline{AD}^2.$$

D'où ce théorème :

*Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des segments déterminés sur le troisième côté par la bissectrice extérieure, moins le carré de cette bissectrice.*

Réciproquement, si D est un point de la droite BC vérifiant la relation (15), AD est la bissectrice extérieure.

En effet des relations (9) et (15), on déduit

$$\overline{AB}^2.\overline{DC} + \overline{AC}^2.\overline{BD} + AB.AC.\overline{BC} = 0,$$

ou

$$\overline{AB}^2.\overline{DC} + \overline{AC}^2.\overline{BD} + AB.AC.(\overline{BD} + \overline{DC}) = 0,$$

ou encore

$$(AB + AC)\left(AB.\overline{DC} + AC.\overline{BD}\right) = 0. \qquad (16)$$

Comme AB + AC n'est pas nul, il faut que

$$AB.\overline{DC} + AC.\overline{BD} = 0,$$

ou

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{AB}{AC},$$

ce qui exprime que AD est la bissectrice extérieure de l'angle A.

De même, si D est un point de la droite BC vérifiant la relation (13), AD est la bissectrice intérieure, à moins que AB ne soit égal à AC.

En effet, le système des relations (9) et (13) ne diffère du système des relations (9) et (15) que par le changement de AC en — AC ; donc, en raisonnant comme ci-dessus, on trouvera, au lieu de la relation (16), la suivante

$$(AB - AC)\left(AB.\overline{DC} - AC.\overline{BD}\right) = 0.$$

Par conséquent, ou bien AB = AC, ou bien

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{AB}{AC},$$

ce qui prouve que AD est la bissectrice intérieure de l'angle A, si l'on suppose AB = AC.

191. Proposons-nous de trouver, comme application de la formule de Stewart ([1]), le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points donnés A et B soit égal à un nombre donné $\lambda$ [159].

Soit M un point du plan et O un point de la droite AB; la formule de Stewart nous donne

$$\overline{MA}^2.\overline{BO} + \overline{MB}^2.\overline{OA} + \overline{MO}^2.\overline{AB} + \overline{BO}.\overline{OA}.\overline{AB} = 0.$$

Si donc le point M est un point du lieu, c'est-à-dire si

$$\frac{MA}{MB} = \lambda,$$

et si l'on détermine le point O de façon que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \lambda^2 = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2},$$

la relation de Stewart se réduit à

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}.\overline{OB}.$$

Donc OM est constant; donc tous les points du lieu se trouvent sur une circonférence de centre O et de rayon égal à $\sqrt{\overline{OA}.\overline{OB}}$.

*Réciproquement,* si le point M est sur cette circonférence :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}.\overline{OB}.$$

Donc la relation de Stewart se réduit à

$$\overline{MA}^2.\overline{BO} + \overline{MB}^2.\overline{OA} = 0;$$

d'où

$$\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \lambda^2,$$

([1]) Voir B. M. E. II, p. 65.

ou

$$\frac{MA}{MB} = \lambda,$$

ce qui prouve que M est un point du lieu.

192. ***Théorème.*** — *Dans tout quadrilatère, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales, plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.*

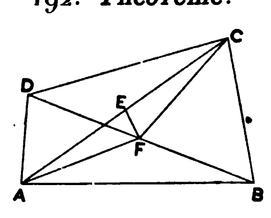


Fig. 178.

Soient (fig. 178) E, F les milieux des diagonales AC, BD du quadrilatère ABCD. Menons AF, CF, EF ; dans les triangles ABD, CBD, AFC, on a :

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{BF}^2$$
$$\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{CF}^2 + 2\overline{BF}^2,$$
$$2\overline{AF}^2 + 2\overline{CF}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Ajoutant membre à membre et réduisant, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

Or $AC = 2AE$, $BD = 2BF$ ; donc on a enfin

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2. \quad (17)$$

Corollaires. — I. — *Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales ;* car alors les diagonales se coupent en leurs milieux, donc $EF = 0$.

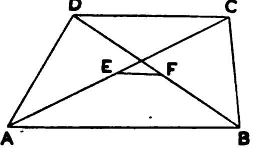


Fig. 179.

*Et réciproquement.*

II. — Dans un trapèze convexe ABCD (fig. 179) la

ligne EF est égale à la demi-différence des bases AB, CD [p. 57, ex. 5] ; par suite,

$$4\overline{EF}^2 = (AB - CD)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - 2AB.CD ;$$

d'où, en substituant dans (17),

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB.CD.$$

Donc, *dans tout trapèze convexe, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus le double produit des bases.*

*Et réciproquement.*

### PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE. AXE RADICAL. — CENTRE RADICAL.

193. ***Théorème.*** — *Si par un point du plan d'un cercle on mène des sécantes, le produit des vecteurs issus de ce point et aboutissant aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant. Ce produit constant s'appelle la* PUISSANCE *du point par rapport au cercle et a pour expression* $d^2 - R^2$, *d désignant la distance du point au centre du cercle et* R *le rayon du cercle.*

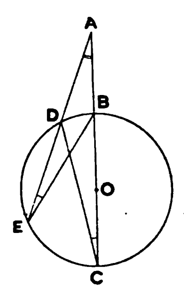


Fig. 180.

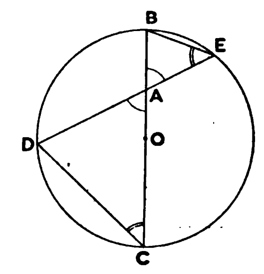


Fig. 181.

Soient (fig. 180 et 181) ABC, ADE deux sécantes

issues de A et rencontrant le cercle O, l'une en B et C, l'autre en D et E. Menons CD, BE. Les deux triangles ACD, AEB sont semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun ; car les angles en A sont ou identiques (fig. 180) ou opposés par le sommet (fig. 181) et les angles E et C sont égaux comme ayant même mesure. Donc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}, \text{ d'où } AB.AC = AD.\ AE.$$

Donc les deux produits $\overline{AB}.\overline{AC}$, $\overline{AD}.\overline{AE}$ ont même valeur absolue ; d'ailleurs ils sont tous deux positifs, ou tous deux négatifs, selon que le point A est extérieur ou intérieur au cercle. Donc ils sont égaux :

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{AD}\cdot\overline{AE}. \qquad (1)$$

Ainsi le produit $\overline{AB}.\ \overline{AC}$ reste constant quand la sécante tourne autour du point A. Donc, pour trouver la valeur de ce produit, nous pouvons supposer que la sécante ABC passe par le centre O. On a alors

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}, \quad \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{AO} - \overline{OB}.$$

Le produit $\overline{AB}.\overline{AC}$, que nous appelons la *puissance* du point A, est donc égal à

$$(\overline{AO} + \overline{OB})\ (\overline{AO} - \overline{OB}) = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2 = d^2 - R^2.$$

Cette puissance est positive, nulle ou négative, selon que $d$ est supérieur, égal ou inférieur à R, c'est-à-dire selon que le point A est extérieur au cercle, situé sur la circonférence, ou intérieur.

REMARQUE. — Quand le point A est extérieur (fig. 182), il peut arriver que la sécante ABC devienne

tangente; alors, les deux points B et C se confondent en un seul, le produit $\overline{AB}.\overline{AC}$ devient $\overline{AB}^2$ et l'égalité (1) devient

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AE}; \qquad (2)$$

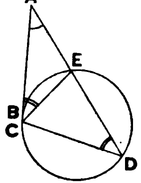


Fig. 182.

c'est-à-dire que *le carré de la tangente* AB *issue du point* A *est égal au produit de la sécante entière* AD *par sa partie extérieure* AE.

La puissance d'un point extérieur est donc égale au carré de la tangente issue de ce point.

D'ailleurs on peut démontrer directement l'égalité (2) en remarquant que les triangles ABD, AEB sont encore semblables comme ayant deux angles égaux chacun à chacun.

194. Réciproques. — 1° *Soient* A *le point de concours de deux droites,* B *et* C *deux points de l'une,* D *et* E *deux points de l'autre* (fig. 180 et 181), *si*

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE},$$

*les quatre points* B, C, D, E *sont une même circonférence.*

En effet, la circonférence menée par les trois points B, C, D coupe la droite AD en un point E′ tel que [193]

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE'}.$$

En comparant avec l'hypothèse, on en conclut que $\overline{AE} = \overline{AE'}$; par conséquent, les points E et E′ coïncident.

2° *Soient* A *le point de concours de deux droites,* B *un point de l'une,* D *et* E *deux points de l'autre* (fig. 182); *si*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}.\overline{AE},$$

*la circonférence menée par les trois points* B, D, E *est tangente en* B *à la droite* AB.

En effet, cette circonférence rencontre la droite AB en un point C tel que

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE}.$$

En comparant avec l'hypothèse, on en conclut que $\overline{AB} = \overline{AC}$; donc les points B et C coïncident.

195. Droites antiparallèles. — On dit que deux droites $a$, $a'$ sont *antiparallèles par rapport à deux autres droites* $b$, $b'$ quand l'angle $(a, b)$ est égal à l'angle $(b', a')$, ce qui entraîne l'égalité des angles $(a, b')$ et $(b, a')$, $(b, a)$ et $(a', b')$, $(b', a)$ et $(a', b)$. Donc l'ordre dans lequel on énonce les deux couples de droites et les deux droites de chaque couple est indifférent ; on peut dire indifféremment que $a$ et $a'$ sont antiparallèles par rapport à $b$ et $b'$, ou que $b'$ et $b$ sont antiparallèles par rapport à $a$ et $a'$, etc., ou tout simplement que *les deux couples de droites*, $a$ *et* $a'$, $b$ *et* $b'$, *sont antiparallèles*.

Si quatre points B, C, D, E (fig. 180 et 181) sont sur un même cercle,

$$(BC, DC) = (BE, DE) ;$$

donc les droites BC, DE sont antiparallèles par rapport aux droites DC, BE. Et réciproquement. Donc les théorèmes des nos 193 et 194 peuvent s'énoncer en disant :

*Si deux droites antiparallèles par rapport à deux droites issues d'un point* A *rencontrent l'une de ces deux droites en* B *et* C *et l'autre en* D *et* E, *on a*

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AD}.\overline{AE};$$

*et réciproquement.*

De la définition des antiparallèles résultent un grand nombre de propriétés :

1° Quand deux couples de droites sont antiparallèles, les bissectrices des angles formés par les droites du premier

couple sont parallèles aux bissectrices des angles formés par celles du second. Et réciproquement.

2° Deux couples de droites antiparallèles par rapport à un troisième couple sont antiparallèles l'un par rapport à l'autre.

3° Deux droites antiparallèles par rapport à deux droites parallèles forment avec celles-ci un trapèze isoscèle.

4° Dans un triangle ABC, les antiparallèles au côté BC par rapport aux deux autres côtés sont parallèles à la tangente en A au cercle circonscrit.

5° Dans deux figures inversement semblables, tous les couples de droites homologues sont antiparallèles.

6° Si les droites qui joignent un point du plan d'un parallélogramme à deux sommets opposés sont antiparallèles par rapport aux côtés de ce parallélogramme, celles qui joignent ce même point aux deux autres sommets le sont aussi [1], etc., etc.

196. On peut démontrer directement, à l'aide du théorème du n° 193, les théorèmes du n° 190 relatifs aux bissectrices intérieure et extérieure d'un triangle.

Soient (fig. 183) AD la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC; E le point où elle rencontre le cercle circonscrit au triangle.

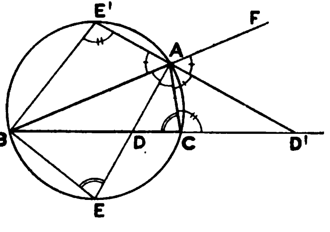


Fig. 183.

Les triangles AEB, ACD sont semblables, comme ayant deux angles égaux chacun à chacun : les angles en A égaux par hypothèse et les angles E et C égaux comme ayant même mesure. Donc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

d'où

$$AB.AC = AE.AD = (AD + DE)AD = \overline{AD}^2 + AD.DE.$$

[1] Voir B. M. E. I, p. 8; II, p. 78.

Mais AD.DE = BD.DC [193], donc

$$AB.AC = \overline{AD}^2 + BD.DC.$$

De même, soient AD′ la bissectrice extérieure; E′ le point où elle rencontre le cercle circonscrit. Les triangles AE′B, ACD′ sont encore semblables, pour la même raison ; donc

$$\frac{AB}{AD'} = \frac{AE'}{AC};$$

d'où

$$AB.AC = AE'.AD' = (D'E' - AD')\,AD'$$
$$= D'E'.D'A - \overline{AD'}^2 = D'B.D'C - \overline{AD'}^2.$$

### AXES RADICAUX

197. ***Théorème.*** — *Le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux cercles* O *et* O′ (fig. 184), *est une droite perpendiculaire à la ligne des centres.*

Cette droite s'appelle l'*axe radical* des deux cercles.

Fig. 184.

Soit M un point du lieu; en désignant par R et R′ les rayons des deux cercles, les puissances de ce point par rapport aux deux cercles sont $\overline{MO}^2 - R^2$, $\overline{MO'}^2 - R'^2$.

En écrivant que ces puissances sont égales, on a

$$\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2, \text{ ou } \overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2.$$

Donc on est ramené à trouver le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes O et O′ soit égale à une quantité constante $R^2 - R'^2$ ; on sait [187, III] que ce lieu est une droite perpendiculaire à OO′. — C. q. f. d.

REMARQUE. — Tout point commun à deux cercles a une puissance nulle par rapport à ces deux cercles, et, par suite, appartient à leur axe radical. Donc

*L'axe radical de deux cercles qui se coupent est la droite qui joint leurs points d'intersection, et l'axe radical de deux cercles tangents est la tangente commune.*

198. **Théorème.** — *Quand les centres* O, O′, O″ *de trois cercles ne sont pas en ligne droite, les trois axes radicaux de ces trois cercles considérés deux à deux concourent en un même point, qu'on appelle le centre radical des trois cercles.*

En effet, l'axe radical des cercles O, O″, et celui des cercles O′, O″, étant perpendiculaires à deux droites concourantes OO″, O′O″, se coupent en un point C, qui a même puissance par rapport aux trois cercles et qui, par conséquent, appartient à l'axe radical des cercles O, O′.

APPLICATION. — Pour construire l'axe radical de deux cercles O et O′ (fig. 185), qui n'ont pas de point commun, on mène un troisième cercle O″ qui les rencontre en A, B et A′, B′; on trace AB, A′B′, qui se coupent en un point C, qui est un point de l'axe radical des cercles O et O′ [198].

On en détermine un second point par le même procédé, et en joignant ces deux points par une ligne droite on a l'axe radical cherché.

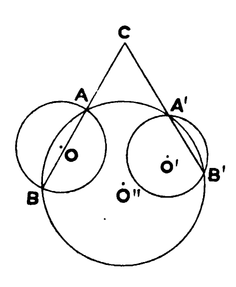


Fig. 185.

REMARQUE. — Si les trois centres O, O′, O″ sont en ligne droite, les trois axes radicaux sont, en général, parallèles et distincts. Mais si deux d'entre eux coïn-

cident, tous leurs points ont même puissance par rapport aux trois cercles, et, par conséquent, appartiennent au troisième axe radical. Donc, dans ce cas, les trois axes radicaux coïncident ; c'est ce qui arrive, par exemple, quand les trois cercles ont deux points communs.

199. ***Théorème.*** — *Pour que deux cercles soient orthogonaux, il faut et il suffit que la puissance du centre de l'un, par rapport à l'autre, soit égale au carré du rayon du premier.*

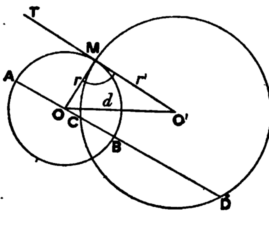


Fig. 186.

Soient (fig. 186) O et O′ les centres de deux cercles, $r$ le rayon du cercle O.

1° Si ces deux cercles sont orthogonaux, le rayon OM qui aboutit à l'un des points d'intersection est tangent au cercle O′; donc la puissance du point O par rapport au cercle O′ est $\overline{\text{OM}}^2$ ou $r^2$.

2° Réciproquement, si la puissance du point O par rapport au cercle O′ est égale à $r^2$, comme cette puissance est positive, on peut mener de O une tangente au cercle O′ et la longueur de cette tangente OM est égale à $r$ ; donc son point de contact M est un point commun aux deux cercles. D'ailleurs, la tangente en M au cercle O est perpendiculaire à OM ; donc les deux cercles sont orthogonaux.

Corollaires. — I. — *Si quatre points* A, B, C, D *forment une division harmonique, le cercle de diamètre* AB *coupe orthogonalement tous les cercles passant par* C *et* D. Car, en appelant O le milieu de AB, on a

$$\overline{\text{OC}}.\overline{\text{OD}} = \overline{\text{OA}}^2 ;$$

c'est-à dire que la puissance de O par rapport aux cercles passant par C et D est égale au carré du rayon du cercle de diamètre AB.

Réciproquement, *si deux cercles sont orthogonaux, tout dia-*

*mètre de l'un qui rencontre l'autre est divisé harmoniquement par cet autre.*

II. — *Le lieu des centres des cercles orthogonaux à deux cercles donnés est la portion de l'axe radical extérieure aux deux cercles, si ces deux cercles se coupent ; sinon, c'est l'axe radical tout entier.*

Remarque. — La condition d'orthogonalité de deux cercles peut encore s'écrire

$$d^2 = r^2 + r'^2,$$

en désignant par $r$, $r'$ les rayons et par $d$ la distance des centres des deux cercles. En écrivant :

$$d^2 - r^2 - r'^2 = 0 \quad \text{ou} \quad d^2 - r'^2 - r^2 = 0,$$

on peut énoncer ainsi la condition d'orthogonalité : *Pour que deux cercles soient orthogonaux il faut et il suffit que les puissances du centre de l'un d'eux par rapport à ces deux cercles aient une somme nulle.*

## PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE.

200. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère convexe inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*

*Et réciproquement.*

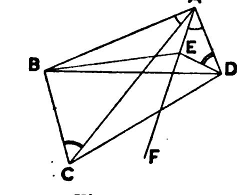


Fig. 187.

Soit (fig. 187) ABCD un quadrilatère convexe quelconque. Menons, dans l'angle BAD, une droite AF faisant avec AD un angle égal à BAC ; l'angle BAF sera aussi égal à CAD. Donc si l'on prend sur cette droite AF une longueur AE telle que

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

les triangles AED, AEB seront respectivement semblables aux triangles ABC, ADC, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels. Donc

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}, \quad \text{ou} \quad AD.BC = AC.DE,$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}, \quad \text{ou} \quad AB.CD = AC.BE;$$

d'où

$$AD.BC + AB.CD = AC(BE + ED).$$

Or, en général, $BE + ED > BD$; donc *la somme des produits des côtés opposés est, en général, plus grande que le produit des diagonales.*

Il n'y a exception que si le point E est sur BD, et alors $BE + ED = BD$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les angles ADE, ADB soient égaux; or l'angle ADE est égal à ACB, en vertu de la similitude des triangles. Donc, pour que la somme des produits des côtés opposés soit égale au produit des diagonales, il faut et il suffit que le quadrilatère soit inscriptible.

Remarque. — Le théorème précédent peut s'énoncer en disant que, *dans un quadrilatère croisé inscriptible* ABDC, *le produit des diagonales* AD, BC *est égal au produit des côtés croisés moins le produit des deux autres côtés ; et réciproquement.*

Si le quadrilatère ABCD n'est ni convexe, ni inscriptible, en construisant toujours un triangle ADE directement semblable à ACB, le point E sera hors de BD et on verra comme ci-dessus que la somme des produits des côtés opposés est plus grande que le produit des diagonales.

201. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère convexe ins-*

*criptible, le rapport des diagonales est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde. Et réciproquement.*

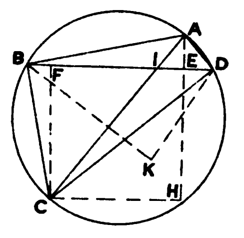



Fig. 188.

Soit (fig. 188) ABCD un quadrilatère convexe inscrit à un cercle de rayon R; en menant les hauteurs AE, CF des triangles ABD, BCD, on a [186]

$$AB.\,AD = 2R.AE \qquad (1)$$

$$BC.\,CD = 2R.CF; \qquad (2)$$

d'où

$$AB.AD + BC.CD = 2R\,(AE + CF).$$

En prolongeant AE jusqu'à sa rencontre en H avec la parallèle à BD menée par C, on a AE + CF = AH; donc

$$AB.AD + BC.CD = 2R.AH. \qquad (3)$$

On trouverait de même

$$AB.BC + AD.CD = 2R.BK, \qquad (4)$$

BK désignant la perpendiculaire abaissée de B sur la parallèle à AC menée par D.

En divisant membre à membre les égalités (3) et (4), on a

$$\frac{AB.\,AD + BC.\,CD}{AB.\,BC + AD.\,CD} = \frac{AH}{BK}.$$

Or les angles aigus CAH, DBK sont égaux, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires; donc

les triangles rectangles CAH, DBK sont semblables; d'où

$$\frac{AH}{BK} = \frac{AC}{BD}.$$

Donc enfin

$$\frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + AD.CD} = \frac{AC}{BD}. \qquad (5)$$

Pour établir la réciproque, nous allons d'abord montrer qu'on peut construire un quadrilatère inscriptible convexe ayant pour côtés consécutifs quatre longueurs données $a$, $b$, $c$, $d$, pourvu que la plus grande de ces longueurs soit moindre que la somme des trois autres.

Pour cela, il suffit évidemment de construire (fig. 189) deux triangles OAB, OCD ayant un côté égal, AB = CD, opposé à des angles supplémentaires et les deux autres côtés respectivement égaux à $a$, $b$ et à $c$, $d$; car, en juxtaposant ces deux triangles, on aura un quadrilatère $OAO_1B$ répondant à la question. Prenons donc sur une droite, de part et d'autre d'un point O, des longueurs $OA = a$, $OC = c$; il s'agit de trouver, sur le cercle décrit de O comme centre avec $b$ pour rayon, un point B tel qu'en prenant sur OB une longueur $OD = d$ on ait CD = AB. Soit E le point de rencontre de OC avec la parallèle à CD menée par B; on devra avoir

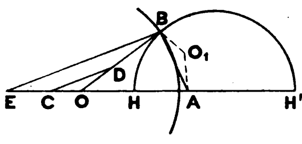


Fig. 189.

$$\frac{OE}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \text{ou} \quad \frac{OE}{c} = \frac{b}{d},$$

$$\frac{BE}{CD} = \frac{OB}{OD} \quad \text{ou} \quad \frac{BE}{BA} = \frac{b}{d}.$$

Par conséquent, si l'on prend sur OC une longueur $OE = \frac{bc}{d}$ et si l'on construit les deux points H et H′ qui divisent, intérieurement et extérieurement, la droite EA dans le rapport $\frac{b}{d}$, le point B sera sur le cercle de diamètre HH′, et, comme il est déjà sur le cercle de centre O et de rayon $b$, il sera à l'intersection de ces deux cercles.

Reste à trouver la condition pour que ces deux cercles se coupent. Or on a [ex. 1 (3) p. 124]

$$(b+d)\,\overline{\mathrm{OH}} = b.\overline{\mathrm{OA}} + d.\overline{\mathrm{OE}},$$
$$(b-d)\,\overline{\mathrm{OH'}} = b.\overline{\mathrm{OA}} - d.\overline{\mathrm{OE}};$$

en prenant pour sens positif celui de O vers A, on en tire

$$\overline{\mathrm{OH}} = \frac{(a-c)\,b}{b+d}, \qquad \overline{\mathrm{OH'}} = \frac{(a+c)\,b}{b-d}.$$

Soit $a$ la plus grande des longueurs données; de plus, supposons, pour fixer les idées, $b > d$. Il en résulte que $\overline{\mathrm{OH}}$ est positif et que $\overline{\mathrm{OH'}}$ est plus grand que $b$; donc H′ est *extérieur* au cercle de centre O et de rayon $b$. Donc, pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que $\overline{\mathrm{OH}} < b$, ou

$$\frac{(a-c)\,b}{b+d} < b, \quad \text{ou} \quad a < b+c+d;$$

ce qui est la condition annoncée.

Cela posé, soit ABCD un quadrilatère vérifiant la relation (5); il s'agit de prouver qu'il est inscriptible. En effet, construisons un quadrilatère inscriptible A′B′C′D′ dont les côtés A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ soient respectivement égaux à AB, BC, CD, DA; nous aurons

$$\frac{\mathrm{A'B'.\,A'D'} + \mathrm{B'C'.\,C'D'}}{\mathrm{A'B'.\,B'C'} + \mathrm{A'D'.\,C'D'}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{B'D'}}. \tag{6}$$

Mais les premiers membres des égalités (5) et (6) sont identiques. Donc

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{B'D'}}.$$

Si donc AC était plus grand que A′C′, il faudrait que BD fût aussi plus grand que B′D′. Mais alors les triangles ABD, A′B′D′ ayant deux côtés égaux chacun à chacun et les troisièmes côtés inégaux, BD > B′D′, l'angle A serait plus grand que A′; de même B > B′, C > C′, D > D′. Donc la somme A + B + C + D serait plus grande que A′ + B′ + C′ + D′, ce qui est impos-

sible, puisque ces deux sommes sont égales chacune à quatre angles droits.

On démontre de même que AC ne peut être plus petit que A'C'. Donc AC = A'C' et le quadrilatère proposé ABCD est égal au quadrilatère inscriptible A'B'C'D'.

C. q. f. d.

## CONSTRUCTIONS

202. Problème. — *Construire la moyenne géométrique de deux lignes données a, b.*

*Première construction.* — Prenons (fig. 190) sur une droite deux longueurs consécutives AB = $a$, BC = $b$; sur AC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence; enfin, menons par B la perpendiculaire à AC, qui rencontre cette demi-circonférence en D : BD est la moyenne proportionnelle demandée [183], car le triangle ADC est rectangle en D.

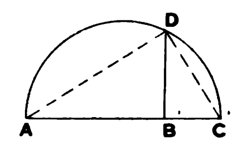


Fig. 190.

Op. ($4\,R_1 + 11\,C_1 + C_2 + 3\,R_2 + 6\,C_3$).
Exactitude : 16. Simplicité : 25.

*Deuxième construction.* — Soit $a > b$. Prenons (fig. 191) sur une droite, à partir d'un point A et dans le même sens, des longueurs AB = $a$, AC = $b$; sur AB comme diamètre décrivons une demi-circonférence et menons par C la perpendiculaire à AB, qui rencontre cette demi-circonférence en D : AD est la moyenne proportionnelle demandée [183].

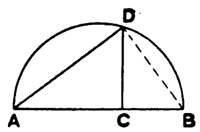


Fig. 191.

Op. ($4R_1 + 9C_1 + C_2 + 3R_2 + 5C_3$).
Exactitude : 14. Simplicité : 22.

On arrive beaucoup plus vite en cherchant à construire la moyenne proportionnelle entre $2a$ et $\frac{b}{2}$. Pour cela, d'un point A d'une droite comme centre (fig. 192), avec $a$ pour rayon, décrivons un cercle qui coupe cette droite en B et C; de B comme centre avec $b$ pour rayon décrivons un cercle qui coupe BC en D; de D comme centre avec le même rayon $b$, décrivons un cercle qui coupe le précédent en E et F; menons EF, qui rencontre

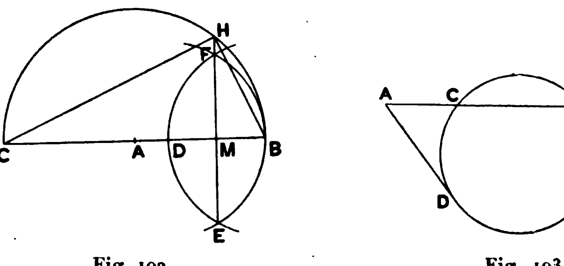



Fig. 192. Fig. 193.

le cercle BC en un point H : BH est la moyenne proportionnelle cherchée. Car, EF étant évidemment perpendiculaire à BD en son milieu M, on a

$$\overline{BH}^2 = BC.\,BM = 2a\cdot\frac{b}{2} = ab.$$

Op. $(2R_1 + 6C_1 + C_2 + 2R_2 + 3C_3)$.

Exactitude : 9. Simplicité : 14.

*Troisième construction.* — On prend sur une droite (fig. 193), à partir d'un point A et dans le même sens, des longueurs $AB = a$, $AC = b$; on fait passer par B et C une circonférence quelconque et par A on lui mène une tangente AD qui est la moyenne proportionnelle demandée [193].

Op. $(4R_1 + 11C_1 + C_2 + 3R_2 + 7C_3)$.

Exactitude : 16. Simplicité : 26.

203. *Construction d'expressions irrationnelles.* — Soit à construire la longueur $x$ définie par l'équation

$$x = \sqrt{A},$$

A étant une expression rationnelle, homogène et du second degré formée avec des lettres $a$, $b$,... qui désignent des lignes données; par exemple,

$$A = \frac{a^5 + b^5}{c^3 - d^3}.$$

En désignant par $\lambda$ une longueur arbitrairement choisie, nous savons [164] construire une ligne $y$ telle que $\lambda y = A$; alors la longueur cherchée $x$ est la moyenne proportionnelle entre $\lambda$ et $y$.

Soit encore à construire

$$x = \sqrt[4]{B} = \sqrt{\sqrt{B}},$$

B étant une expression rationnelle, homogène et du *quatrième* degré. Ayant choisi une ligne arbitraire $\lambda$, nous pourrons construire une ligne $y$ telle que $\lambda^3 y = A$; et alors

$$x = \sqrt{\sqrt{\lambda^3 y}} = \sqrt{\lambda\sqrt{\lambda y}}.$$

Nous construirons une ligne $z = \sqrt{\lambda y}$ moyenne proportionnelle entre $\lambda$ et $y$, et la longueur cherchée $x$ sera la moyenne proportionnelle entre $\lambda$ et $z$.

Nous pourrons construire par ce procédé toutes les expressions irrationnelles homogènes et du premier degré, *pourvu qu'elles ne renferment pas d'autres radicaux que des racines carrées,* et, par suite, résoudre géométriquement, au moyen de la règle et du compas, tous les problèmes où l'inconnue est donnée par la résolution d'une ou plusieurs équations du second degré.

D'ailleurs, dans chaque cas particulier, il y a lieu de chercher une construction plus directe et plus simple que celle qui est fournie par la méthode générale ci-dessus. C'est ce que nous allons faire pour les questions suivantes.

204. Problème. — *Construire* $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

On considère $x$ comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $a$ et $b$.

De même, pour construire $x = \sqrt{a^2-b^2}$, on considère $x$ comme le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant $a$ pour hypoténuse et $b$ pour premier côté de l'angle droit.

Plus généralement, si

$$x^2 = a^2 \pm b^2 \pm c^2 \ldots,$$

on pourra construire $x$ par une série de triangles rectangles en construisant successivement des lignes $y$, $z$,... telles que

$$y^2 = a^2 \pm b^2, \quad z^2 = y^2 \pm c^2, \ldots$$

205. Problème. — *Construire deux droites dont la somme et la moyenne proportionnelle soient respectivement égales à deux lignes données a et b.*

Soient AB, BC (fig. 194), deux lignes répondant à la question; leur somme AC doit être égale à $a$, et, si sur AC comme diamètre on décrit une demi-circonférence, qui rencontre en D la perpendiculaire à AC menée par B, BD sera égal à la moyenne proportionnelle $b$. D'où la construction suivante :

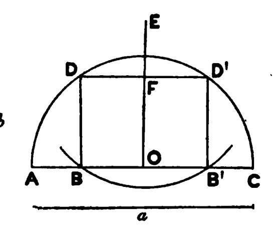


Fig. 194.

Sur le milieu d'une droite AC égale à $a$ élevez la perpendiculaire OE, prenez sur cette perpendiculaire une longueur OF $= b$, menez par F une parallèle à AC, qui rencontre en D et D′ la circonférence décrite sur AC comme diamètre; enfin abaissez DB et D′B′ perpendiculaires sur AC : les droites AB et BC, ou les

droites AB′ et B′C, répondent à la question. Mais AB′ = BC et B′C = AB. Donc il n'y a qu'*une solution*.

Pour que le problème soit possible, il faut que OF soit inférieur ou au plus égal au rayon de la circonférence, c'est-à-dire

$$b \leq \frac{a}{2};$$

si $b = \frac{a}{2}$, le point B se confond avec le point O et les lignes AB et BC sont égales.

D'ailleurs, on peut se dispenser de tracer la circonférence AC et les droites FD et DB en remarquant que FB = OD = $\frac{a}{2}$; donc on peut déterminer le point B par une circonférence décrite de F comme centre avec OA pour rayon. De cette manière, la construction a pour symbole

$$\text{Op.}(2R_1 + 8C_1 + C_2 + 2R_2 + 4C_3).$$

Exactitude : 11. Simplicité : 17.

206. Problème. — *Construire deux droites dont la différence et la moyenne proportionnelle soient respectivement égales à deux lignes données a et b.*

Soient AB, AC (fig. 195), deux lignes répondant à la question ; leur différence BC doit être égale à $a$, et, si sur BC comme diamètre on décrit une demi-circonférence, la tangente AD issue de A sera égale à la moyenne proportionnelle $b$. D'où la construction suivante :

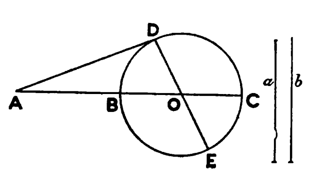


Fig. 195.

Sur une droite DE = $a$ comme diamètre décrivez une demi-circonférence, portez sur la tangente en D une longueur DA = $b$ et joignez le point A au centre O ;

soient B et C les points de rencontre de la droite AO avec la circonférence : AB et AC sont les droites demandées.

Le problème est donc toujours possible et n'a qu'une solution.

207. Problème. — *Construire les racines d'une équation du second degré.*

Une équation du second degré homogène peut se ramener à l'une des quatre formes suivantes :

$$x^2 - ax + b^2 = 0, \quad (1)$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0, \quad (2)$$
$$x^2 + ax + b^2 = 0, \quad (3)$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0; \quad (4)$$

en désignant par $a$ et $b$ deux lignes données et par $x$ l'inconnue.

L'équation (1) peut s'écrire

$$x(a - x) = b^2;$$

donc on a à construire deux lignes $x$ et $a - x$ dont la somme soit égale à $a$ et la moyenne proportionnelle à $b$ : l'une quelconque des deux lignes trouvées sera une valeur de $x$. Pour que le problème soit possible il faut que $b \leq \frac{a}{2}$. Si $b = \frac{a}{2}$, les deux racines sont égales.

L'équation (2) peut s'écrire

$$x(x + a) = b^2;$$

donc on a à construire deux lignes $x$ et $x + a$ dont la différence soit égale à $a$ et la moyenne proportionnelle à $b$ : la plus petite des deux lignes trouvées sera la valeur de $x$. Donc l'équation (2) a une racine positive et une seule.

Soit $x = -\alpha$ une racine négative de cette même équation. On aura

$$\alpha^2 - a\alpha - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha(\alpha - a) = b^2;$$

donc on a encore à construire deux lignes $\alpha$ et $\alpha - a$ dont la différence soit égale à $a$ et la moyenne proportionnelle à $b$; mais c'est la plus grande des deux lignes trouvées qui sera la valeur de $\alpha$.

En résumé, si on construit deux lignes dont la différence soit $a$ et la moyenne proportionnelle $b$, la plus petite représentera la racine positive et la plus grande la valeur absolue de la racine négative de l'équation (2). Le problème est toujours possible; autrement dit, l'équation (2) a toujours deux racines, une positive et une négative.

Les équations (3) et (4) ne diffèrent de (1) et de (2) que par le changement de $x$ en $-x$; donc leurs racines sont respectivement égales à celles de (1) et de (2) changées de signe. D'ailleurs on peut appliquer directement à l'équation (4) la méthode suivie pour l'équation (2).

Remarque. — On ramène au second degré l'équation bicarrée

$$x^4 \pm a^2x^2 \pm b^4 = 0$$

en posant $x^2 = ay$. On peut construire $y$, qui est donné par l'équation

$$y^2 \pm ay \pm \frac{b^4}{a^2} = 0;$$

on en déduit $x$ en construisant la moyenne proportionnelle entre $a$ et $y$.

208. Problème. — *Partager une droite* AB (fig. 196)

*en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire trouver sur cette droite un point* C *tel que*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB + AC}{AC + CB} = \frac{AB + AC}{AB},$$

ou

$$AC(AB + AC) = \overline{AB}^2;$$

et réciproquement, cette égalité entraîne la première.

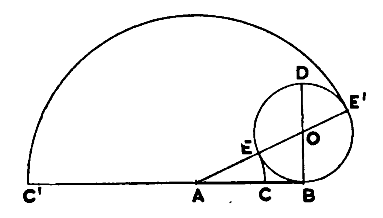



Fig. 196.

Donc on est ramené à construire deux lignes AC et AB + AC dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales à AB : la plus petite de ces deux lignes sera égale à AC.

On peut se demander si on ne pourrait pas trouver sur le prolongement de AB un point C′ répondant à la question, c'est-à-dire tel que

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC'}{BC'}.$$

Le point C′ ne peut être à droite de B, car $\frac{AB}{AC'}$ serait moindre que l'unité et $\frac{AC'}{BC'}$ plus grand que l'unité ; il

faut donc chercher le point C′ à gauche de A. Mais alors l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC' - AB}{BC' - AC'} = \frac{AC' - AB}{AB},$$

ou

$$AC'(AC' - AB) = \overline{AB}^2.$$

Donc on est encore ramené à construire deux lignes AC′ et AC′ — AB dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales à AB ; mais c'est la plus grande de ces deux lignes qui sera égale à AC′.

D'où la construction suivante :

Au point B on élève BD perpendiculaire et égal à AB ; sur BD comme diamètre on décrit une circonférence et on joint le point A au centre O ; soient E et E′ les points de rencontre de la droite AO avec la circonférence : on a AE = AC, AE′ = AC′. Il ne reste plus qu'à rabattre AE et AE′ sur la droite AB et sur son prolongement, en AC et AC′.

*Calcul de* AC *et de* AC′. — Posons AB = $a$. On a successivement

$$AC = AE = AO - OE,$$
$$AC' = AE' = AO + OE';$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 \times 5}{4},$$

$$AO = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

D'où

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

On en déduit

$$BC = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$BC' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

209. Autre construction. — Puisque AB est moyenne proportionnelle entre AC et AC' (fig. 197), la perpendiculaire à AB menée par A rencontre le cercle de diamètre CC' en un point E tel que AE = AB. D'autre part,

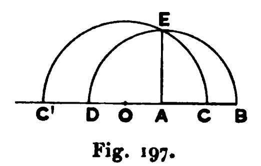


Fig. 197.

puisque AC' — AC = AB, en appelant O le milieu de CC', on a

$$AB = (OC' + OA) - (OC - OA) = 2OA.$$

Donc OA est la moitié de AB. D'où la construction suivante :

Portez sur le prolongement de AB et perpendiculairement à AB deux longueurs AD et AE égales à AB ; du milieu O de AD comme centre, avec OE pour rayon, décrivez un cercle, qui rencontre AB en deux points C et C', qui sont les points demandés.

210. Problème. — *Tracer un cercle passant par deux points donnés* A *et* B (fig. 198) *et tangent à une droite donnée* CD.

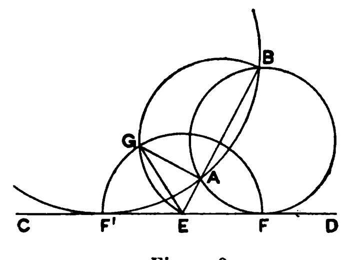


Fig. 198.

Supposons le problème résolu, et soit F le point de contact d'un cercle tangent à la droite CD et passant par A et B. Prolongeons AB jusqu'à sa rencontre en E avec CD.

Nous savons que EF est moyenne proportionnelle entre EA et EB. On construira cette moyenne proportionnelle : soit EG ; on la rabattra de part et d'autre en EF ou en EF′, et il n'y aura plus qu'à faire passer un cercle par les trois points A, B, F ou A, B, F′.

Discussion. — Si les deux points A et B sont d'un même côté par rapport à CD, il y a deux solutions ; néanmoins, dans le cas où AB et CD sont parallèles, il n'y a plus qu'une solution, que l'on trouve immédiatement en remarquant que le point de contact est à l'intersection de CD avec la perpendiculaire élevée au milieu de AB. Si l'un des deux points A et B est sur la droite CD, il n'y a évidemment qu'une solution.

Enfin, le problème est impossible quand les points A et B sont de part et d'autre de CD.

211. Problème. — *Tracer un cercle passant par deux points donnés* A *et* B (fig. 199) *et tangent à un cercle donné* C.

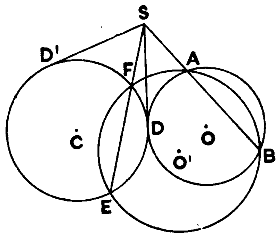


Fig. 199.

Supposons le problème résolu ; soit O le centre d'un cercle passant par A et B et tangent en D au cercle C, et soit S le point où la tangente commune en D rencontre AB. Par les deux points A et B faisons passer un cercle O′ qui coupe le cercle C en deux points E et F. Les axes radicaux des trois cercles C, O, O′ considérés deux à deux sont DS, AB, EF ; nous savons que ces trois axes radicaux concourent en un même point, donc EF passe par S. Par conséquent, le point S sera déterminé par

l'intersection des droites AB et EF ; on mènera par ce point les tangentes SD, SD′ au cercle C ; le cercle passant par A, B, D et celui qui passe par A, B, D′ répondent à la question.

DISCUSSION. — Pour que le problème soit possible, il faut évidemment que les deux points A et B ne soient pas, l'un intérieur, l'autre extérieur au cercle C. Si l'un de ces deux points est sur le cercle C, il n'y a qu'une solution. Si ces deux points sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle C, ils sont d'un même côté de EF, car ils sont tous deux sur l'un des arcs sous-tendus par la corde EF du cercle O′ ; donc le point S est sur le prolongement de AB, par conséquent, à l'extérieur du cercle O′, *sur le prolongement de* EF ; donc le point S est aussi à l'extérieur du cercle C, on peut mener par ce point deux tangentes au cercle C et le problème a deux solutions.

Si les deux points A et B étaient équidistants du centre C, AB serait parallèle à EF ; mais, dans ce cas, on voit immédiatement que les points D et D′ se trouvent sur la perpendiculaire abaissée de C sur AB.

212. REMARQUE. — On peut présenter autrement la discussion.

Soient A, B, C trois points en ligne droite ; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les puissances de ces trois points par rapport à un cercle de centre O et de rayon R. Si, dans la relation de Stewart,

$$\overline{OA}^2.\overline{BC}+\overline{OB}^2.\overline{CA}+\overline{OC}^2.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0, \qquad (1)$$

on pose

$$\overline{OA}^2=\alpha+R^2,\quad \overline{OB}^2=\beta+R^2,\quad \overline{OC}^2=\gamma+R^2,$$

on obtient

$$\alpha.\overline{BC}+\beta.\overline{CA}+\gamma.\overline{AB}+\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}=0: \qquad (2)$$

équation qui fournit une relation entre les puissances de trois points en ligne droite par rapport à un cercle.

Cela posé, soit proposé de mener par A et B un cercle tangent à un cercle donné O. Supposons le problème résolu et soit C le point où la tangente commune au point de contact de la circonférence donnée et de la circonférence cherchée rencontre la droite AB ; on a :

$$\gamma = \overline{CA} \cdot \overline{CB}. \tag{3}$$

En introduisant cette hypothèse dans l'équation (2), celle-ci devient :

$$\alpha . \overline{BC} + \beta . \overline{CA} = 0$$

ou

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{4}$$

Cela posé, si le problème est possible, $\gamma$ est positif, donc $\overline{CA}$ et $\overline{CB}$ ont le même signe ; il en est de même de $\alpha$ et $\beta$ ; en d'autres termes, A et B sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle O.

Réciproquement, si A et B sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs à ce cercle, on peut choisir sur AB un point C vérifiant la relation (4); ce point est extérieur au segment AB, puisque $\alpha$ et $\beta$ sont supposés de même signe.

On aura dès lors

$$\alpha \cdot \overline{BC} + \beta . \overline{CA} = 0$$

et par suite, à cause de la relation (2) :

$$\gamma = \overline{CA} \cdot \overline{CB}.$$

La puissance de C par rapport au cercle O sera donc positive ; on pourra par suite mener de C deux tangentes CT, CT′ au cercle O, T et T′ désignant les points de contact de ces tangentes. Les égalités

$$\overline{CT}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB}, \qquad \overline{CT'}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB},$$

montrent que les cercles passant par A, B, T, et A, B, T′ sont tangents au cercle donné (¹).

213. Problème. — *Construire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Nous représenterons un cercle par deux lettres, dont la première désignera le centre et la seconde le rayon.

Soient (A, $a$), (B, $b$), (C, $c$), les trois cercles donnés. Les cercles tangents à ces trois cercles se divisent en quatre groupes :

1° Ceux qui touchent les trois cercles donnés de la même façon, c'est-à-dire tous les trois extérieurement, ou tous les trois intérieurement ;

2° Ceux qui touchent le cercle (A, $a$) d'une façon et les deux autres de l'autre ;

3° Ceux qui touchent le cercle (B, $b$) d'une façon et les deux autres de l'autre ;

4° Ceux qui touchent le cercle (C, $c$) d'une façon et les deux autres de l'autre.

Soit (D, $r$) un cercle du premier groupe, par exemple, tangent *extérieurement* aux trois cercles donnés et soit X son point de contact avec le cercle (A, $a$).

Le point D étant à l'intersection des trois cercles (A, $a + r$), (B, $b + r$), (C, $c + r$), est le centre radical de ces trois cercles *pourvu que les trois centres* A, B, C *ne soient pas en ligne droite ;* donc c'est un point du lieu décrit par le centre radical H (fig. 200) des trois cercles (A, $a + h$), (B, $b + h$), (C, $c + h$), quand on fait varier $h$ (²).

---

(¹) *Nouvelles annales*, 1887, p. 173.

(²) Si l'on donne à $h$ des valeurs négatives, $a + h$, par exemple, peut être négatif ; dans ce cas, nous conviendrons que (A, $a + h$) désigne le cercle dont le centre est A et dont le rayon a pour mesure la valeur absolue de $a + h$.

De plus,

$$\frac{\overline{XD}}{\overline{AX}} = \frac{r}{a};$$

si donc on prend sur la droite AH un point N tel que

$$\frac{\overline{NH}}{\overline{AN}} = \frac{h}{a},$$

le lieu décrit par le point N ainsi défini passera par X.

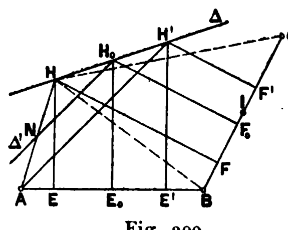


Fig. 200.

Cherchons ces deux lieux.

Soient $H_0$ et $H'$ les positions de H pour $h = o$ et $h = -a$; E et F, $E_0$ et $F_0$, $E'$ et $F'$, les projections de H, $H_0$, $H'$ sur AB et sur BC.

Écrivons que le point H a même puissance par rapport aux deux cercles (B, $b+h$) et (C, $c+h$) :

$$\overline{HB}^2 - (b+h)^2 = \overline{HC}^2 - (c+h)^2,$$

ou

$$\overline{HB}^2 - \overline{HC}^2 = (b+h)^2 - (c+h)^2,$$

ou, en appelant I le milieu de BC,

$$2\overline{BC}\cdot\overline{IF} = b^2 - c^2 + 2h(b-c).$$

D'où, en faisant $h = o$,

$$2\overline{BC}\cdot\overline{IF_0} = b^2 - c^2;$$

puis, en retranchant membre à membre les deux égalités précédentes,

$$2\overline{BC}\cdot\overline{F_0F} = 2(b-c)h.$$

Donc $\overline{F_0F}$ est *proportionnel* à $h$; par conséquent,

$$\frac{\overline{F_0F}}{\overline{F_0F'}} = \frac{h}{-a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\overline{F_0F}}{\overline{F'F_0}} = \frac{h}{a};$$

et, par analogie,

$$\frac{\overline{E_0E}}{\overline{E'E_0}} = \frac{h}{a} = \frac{\overline{F_0F}}{\overline{F'F_0}}.$$

Il en résulte évidemment que les trois points H, $H_0$, H′ sont en ligne droite; car si $H_1$ et $H_2$ sont les points de rencontre de la droite $H'H_0$ avec HE et HF, on a

$$\frac{\overline{H_0H_1}}{\overline{H'H_0}} = \frac{\overline{E_0E}}{\overline{E'E_0}} = \frac{\overline{F_0F}}{\overline{F'F_0}} = \frac{\overline{H_0H_2}}{\overline{H'H_0}};$$

donc $H_1$ et $H_2$ coïncident et, par suite, se confondent avec H.

Ainsi, le lieu du point H est la droite $H'H_0$, que nous appellerons $\Delta$. De plus,

$$\frac{\overline{H_0H}}{\overline{H'H_0}} = \frac{h}{a} = \frac{\overline{NH}}{\overline{AN}};$$

donc $H_0N$ est parallèle à H′A. Par conséquent, le lieu du point N est la parallèle $\Delta'$ à AH′ menée par $H_0$.

On construira les deux droites $\Delta$ et $\Delta'$, en donnant à $h$ deux valeurs particulières, par exemple, $h = 0$ et $h = -2a$, ce qui donnera deux points de chacune d'elles.

Le point X devant se trouver à la fois sur la droite $\Delta'$ et sur le cercle (A, $a$) est à l'intersection de ces deux lignes ; le point X une fois trouvé, on aura le point D à l'intersection des deux droites AX et $\Delta$. Comme la droite $\Delta'$ rencontre le cercle (A, $a$) en deux points au

plus, on a au plus deux solutions pour le premier groupe.

En remplaçant $b+h$ par $b-h$ et $c+h$ par $c-h$, on aura les cercles du deuxième groupe. De même, ceux du troisième, en remplaçant $b+h$ par $b-h$ ; puis, ceux du quatrième, en remplaçant $c+h$ par $c-h$.

Chaque groupe se compose de deux cercles au plus ; donc il y a au plus *huit* solutions.

En faisant toujours $h=0$ et $h=-2a$, on a la construction suivante :

*Construisez le centre radical* $H_0$ *des trois cercles donnés* $(A, a)$, $(B, b)$, $(C, c)$ *; puis les centres radicaux* $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ *des quatre systèmes de trois cercles*

$$(A, a), \quad (B, b \pm 2a), \quad (C, c \pm 2a) ;$$

*ensuite, les symétriques* $N_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *des quatre points* $H_i$ *par rapport à* A. *Tracez les quatre droites* $H_0N_i$, *qui coupent chacune le cercle* $(A, a)$ *en deux points* $X_i$ *et* $X'_i$ *; puis, les rayons* $AX_i$ *et* $AX'_i$, *qui rencontrent les droites* $H_0H_i$ *en* $D_i$ *et* $D'_i$. *Les huit cercles* $(D_i, D_i X_i)$ *et* $(D'_i, D'_i X'_i)$ *sont les cercles cherchés.*

Cette construction, *dans le cas le plus défavorable*, a pour symbole

$$\text{Op.}\ (69R_1 + 35R_2 + 43C_1 + 28C_3).\ \text{Simplicité} : 175.$$

Cette construction s'applique, sans modification, au cas où un ou deux des cercles donnés se réduisent à des points, en considérant ces points comme des cercles de rayon nul.

Elle s'applique également au cas où un ou deux des cercles donnés se réduisent à des droites, en considérant ces droites comme des cercles de rayon infini-

ment grand et en convenant que *l'axe radical d'un cercle et d'une droite quelconques est la droite elle-même.* Voici comment on est conduit à cette convention.

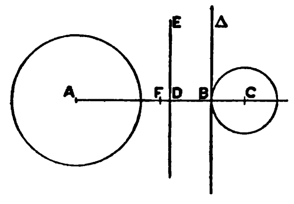



Fig. 201.

Soient (fig. 201) Δ une droite et (A, $a$) un cercle. Abaissons AB perpendiculaire sur Δ, prenons sur la droite AB un point quelconque C, et, de ce point comme centre, avec CB pour rayon, décrivons un cercle. Soit D le point où l'axe radical de ce cercle et du cercle (A, $a$) rencontre AB, et soit F le milieu de AC ; on a [197]

$$a^2 - \overline{BC}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{DC}^2 = 2\overline{AC}.\overline{FD} ;$$

d'autre part,

$$\overline{BA}^2 - \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}.\overline{FB}.$$

D'où, en retranchant membre à membre,

$$\overline{BA}^2 - a^2 = 2\overline{AC}.\overline{DB},$$

ou

$$\overline{DB} = \frac{\overline{BA}^2 - a^2}{2\overline{AC}}.$$

Si maintenant on suppose que le point C s'éloigne à l'infini sur la droite AB, le cercle C, ou du moins la portion de ce cercle comprise à l'intérieur d'un cercle fixe de centre B et de rayon donné d'avance aussi grand qu'on veut, a pour limite la droite Δ (¹) ; mais alors DB tend vers zéro, donc l'axe radical DE a aussi pour limite la droite Δ.

---

(¹) En réalité, le cercle C a pour limite un système de deux droites : la droite Δ et la droite de l'infini.

EXERCICES

1. Un triangle dans lequel les carrés de deux côtés sont entre eux comme leurs projections sur le troisième côté est rectangle ou isoscèle.

2. Dans un triangle rectangle, on inscrit un carré dont un côté DE s'appuie sur l'hypoténuse BC ; prouver que DE est moyen proportionnel entre BD et EC.

3. D'un point O du plan d'un triangle ABC, on abaisse sur les côtés BC, CA, AB des perpendiculaires OA', OB', OC' ; prouver que

$$\overline{BA'}^2 - \overline{CA'}^2 + \overline{CB'}^2 - \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - \overline{BC'}^2 = 0;$$

et réciproquement, si trois points A', B', C' situés sur les côtés BC, CA, AB satisfont à cette relation, les perpendiculaires menées par ces points aux côtés correspondants concourent en un même point.

Application aux perpendiculaires élevées aux milieux des côtés, aux trois hauteurs.

4. Si G est le centre de gravité d'un triangle ABC, on a

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3(\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2).$$

5. M étant un point quelconque du plan d'un triangle dont le centre de gravité est G, on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3\overline{MG}^2 + \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2.$$

6. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points d'un plan et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ autant de nombres correspondants ; O le centre des distances proportionnelles des points (A, $\alpha$) ; M un point quelconque du plan. Prouver que

$$\sum \alpha\overline{MA}^2 = \overline{MO}^2 \times \sum \alpha + \sum \alpha\overline{OA}^2.$$

— La relation a été démontrée [188] dans le cas de deux points ; on fera voir que, si elle est vraie pour un certain nombre de points, elle est encore vraie pour un point de plus.

En déduire que le lieu des points M tels que

$$\sum \alpha\overline{MA}^2 = \text{constante},$$

est, en général, une circonférence de centre O.

Il y a exception lorsque $\Sigma\alpha = 0$ ; dans ce cas, le lieu est une droite.

7. Dans un triangle ABC, on mène deux hauteurs BD et CE ; démontrer que

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA}.\overline{BE} + \overline{CA}.\overline{CD}.$$

— En menant la troisième hauteur AF, on a $\overline{BA}.\overline{BE} = \overline{BF}.\overline{BC}$, etc.

8. Dans tout triangle rectangle, l'inverse du carré de la hauteur est égal à la somme des inverses des carrés des côtés de l'angle droit.

9. Soient $a$, $a'$ les hypoténuses, $h$, $h'$ les hauteurs, $b$ et $c$, $b'$ et $c'$ les côtés de l'angle droit de deux triangles rectangles semblables ; on a

$$aa' = bb' + cc',$$

$$\frac{1}{hh'} = \frac{1}{bb'} + \frac{1}{cc'}.$$ (G. Dostor)

10. Dans un triangle ABC, on mène la hauteur AH et les bissectrices AD et AE de l'angle A et de son supplément ; si O est le milieu de BC, on a

$$OH.OD = \left(\frac{AB - AC}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad OH.OE = \left(\frac{AB + AC}{2}\right)^2.$$

— On prend sur AB une longueur AF = AC ; soit M le milieu de CF, la droite OM est tangente au cercle circonscrit au triangle MDH, etc.

11. Connaissant les quatre côtés d'un trapèze, calculer les diagonales. — On appliquera le théorème de Stewart.

12. Dans tout trapèze circonscrit à un cercle, le rayon du cercle est moyen proportionnel entre les segments déterminés par les points de contact sur chacun des côtés non parallèles.

13. Quand deux cercles sont tangents extérieurement, la portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact est moyenne proportionnelle entre les diamètres.

14. Etant donnés un cercle O et un point P, trouver le lieu des points M tels que MP soit égal à la tangente menée au cercle O par le point M. — Ce lieu est l'axe radical du cercle O et d'un cercle de rayon nul ayant P pour centre.

15. La tangente au cercle des neuf points d'un triangle, au milieu d'un côté, et ce côté sont antiparallèles par rapport aux deux autres côtés.

16. On projette le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle

sur l'hypoténuse et on projette le point obtenu sur les côtés de l'angle droit. On obtient ainsi deux points D, E sur ces côtés, D sur AB, E sur AC. On pose BD = $m$, CE = $n$, prouver les relations suivantes ;

$$\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{a^2},$$
$$3h^2 + m^2 + n^2 = a^2,$$
$$amn = h^3.$$

17. Mener par deux points A et B un cercle orthogonal à un cercle donné O.

— Si l'on prend sur OA un point C tel que $\overline{OC}.\overline{OA}$ soit égal au carré du rayon, le cercle demandé passera par C.

18. Construire un cercle orthogonal à trois cercles donnés.

19. Tracer un cercle tel que les tangentes menées à ce cercle par trois points donnés soient égales à trois longueurs données.

20. Si deux cercles déterminent sur une sécante des cordes égales, le milieu de cette sécante est sur l'axe radical et la perpendiculaire à cette sécante en son milieu passe par le milieu de la distance des centres.

21. Etant donnés deux cercles et un point A, mener par ce point une sécante sur laquelle les deux cercles interceptent des cordes égales. Discussion.

22. Tous les cercles orthogonaux à un cercle donné O et ayant leur centre sur une droite $\Delta$ ont même axe radical et passent par deux points fixes si la droite $\Delta$ est extérieure au cercle O. De plus, la droite qui joint les points d'intersection de chacun de ces cercles avec le cercle O passe par un point fixe ; en d'autres termes, la corde des contacts des tangentes au cercle O issues d'un point quelconque de la droite $\Delta$ passe par un point fixe.

Réciproquement, si une corde d'un cercle tourne autour d'un point fixe, le lieu du point de concours des tangentes aux extrémités de cette corde est une droite.

23. Le lieu des centres des cercles qui coupent deux circonférences données en parties égales est une droite symétrique à l'axe radical par rapport au milieu de la distance des centres.

24. Tracer un cercle qui coupe trois circonférences données en parties égales.

25. Mener par deux points A et B un cercle interceptant sur un cercle donné un arc donné. — On déterminera le point où l'axe radical des deux cercles rencontre la droite AB.

26. Tracer un cercle tangent à un cercle donné O et tangent à une droite donnée en un point donné A.

— Sur la perpendiculaire à cette droite menée par A, on prendra

une longueur AB égale au rayon du cercle O, et le centre du cercle demandé sera équidistant de B et de O.

27. D'un point M pris sur un cercle on abaisse MP et MQ perpendiculaires sur deux tangentes et MR perpendiculaire sur la corde des contacts. Prouver que $\overline{MR}^2 = MP \times MQ$.

28. Lieu des points dont la distance à la base d'un triangle isoscèle est moyenne proportionnelle entre les distances de ce point aux deux autres côtés.

29. Le produit des distances d'un point d'un cercle à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est égal au produit des distances de ce même point aux deux autres côtés.

30. Etant donnés un cercle et un point, si, par ce point on mène deux sécantes rectangulaires, la somme des carrés des quatre segments est égale au carré du diamètre.

31. Lieu des points dont les puissances par rapport à deux cercles sont égales et de signes contraires.

32. On joint un point C pris sur un diamètre AB d'un cercle à un point quelconque M de ce cercle ; puis on mène à la droite CM, par le point M, une perpendiculaire qui rencontre les tangentes en A et B aux points E et F. Prouver que l'angle ECF est droit et que le produit $AE \times BF$ est constant.

33. Construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et sa bissectrice.

— Soient ABC le triangle demandé, AD la bissectrice et E le point où elle rencontre le cercle circonscrit. On a

$$ED \times EA = \overline{EB}^2 \quad \text{et} \quad EA - ED = AD\,;$$

donc on pourra construire les deux droites EA, ED, connaissant leur différence et leur moyenne proportionnelle.

34. Construire un triangle ABC, connaissant l'angle A, la hauteur correspondante et la somme ou la différence des côtés AB et AC.

— Si l'on prolonge AB d'une longueur AD = AC et qu'on appelle E le second point de rencontre de BC avec le cercle passant par A, C, D, dans le triangle BDE, on connaît le côté BD, l'angle opposé et la bissectrice EA.

35. Construire un triangle ABC, connaissant les deux côtés AB, AC et la longueur d'une droite AD partageant le côté BC dans un rapport donné.

— Si l'on mène par D la parallèle à AC, qui rencontre AB en E, il est aisé de voir que, dans le triangle ADE, on connaît les trois côtés.

36. Construire un triangle, connaissant deux côtés et la bissec-

trice de leur angle. — C'est un cas particulier du problème précédent.

37. Construire un triangle, connaissant un angle, un côté et la somme ou la différence des carrés des deux autres.

38. Construire un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit égale à une longueur donnée $a$ et tel que l'un des côtés de l'angle droit soit moyen proportionnel entre l'hypoténuse et l'autre côté. — Soit $x$ cet autre côté, on a $x^2 = a(a - x)$, etc.

39. Construire un triangle rectangle connaissant la somme ou la différence des côtés de l'angle droit et le rapport de leurs carrés. — On pourra commencer par construire un triangle semblable au triangle cherché.

40. Construire un trapèze, connaissant les deux côtés non parallèles, un angle et le produit des bases. — On commencera par construire la différence des bases.

---

## CHAPITRE VI

## TRANSVERSALES. — POLAIRES. — INVERSION

214. **Théorème.** — *Le produit des rapports segmentaires déterminés sur le périmètre d'un polygone par une droite quelconque est égal à + 1.*

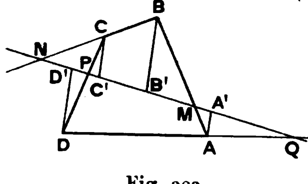



Fig. 202.

Soit ABCD (fig. 202) un polygone quelconque; une droite quelconque coupe les côtés AB, BC, CD, DA aux points M, N, P, Q. Je dis que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \times \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = +1. \qquad (1)$$

En effet, menons par les sommets A, B, C, D des droites

parallèles, qui rencontrent la transversale NQ en A′, B′, C′, D′. On a

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}},$$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{CC'}},$$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}},$$

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AA'}}.$$

En multipliant membre à membre, on obtient la relation (1).

215. En particulier, soit (fig. 203) un triangle ABC coupé par une transversale qui rencontre les côtés BC, CA, AB en D, E, F; on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = +1. \qquad (2)$$

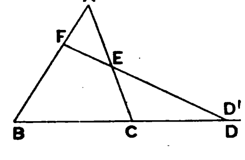


Fig. 203.

RÉCIPROQUEMENT, *si cette relation est vérifiée pour trois points* D, E, F, *situés respectivement sur les côtés* BC, CA, AB *du triangle* ABC, *ou sur leurs prolongements, ces trois points sont en ligne droite.*

En effet, soit D′ le point où EF coupe le côté BC ; on a

$$\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = +1;$$

en comparant les deux égalités précédentes, on trouve

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}},$$

ce qui prouve que le point D coïncide avec D′ et, par suite, est situé sur la droite EF.

216. ***Théorème de Pascal.*** — *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit à un cercle se coupent en trois points situés en ligne droite.*

Soit (fig. 204) ABCDEF un hexagone inscrit à un cercle; numérotons les côtés, en parcourant le périmètre : AB recevant le n° 1, BC le n° 2,... FA le n° 6. Les côtés opposés sont ceux dont les numéros diffèrent de trois unités. Soient L le point de concours des côtés 1, 4; M celui des côtés 2, 5 et N celui des côtés 3, 6.

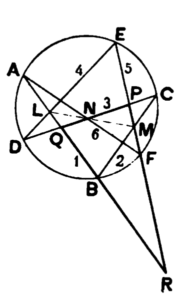


Fig. 204.

Je dis que ces trois points L, M, N sont en ligne droite. En effet, considérons le triangle PQR formé par trois côtés non consécutifs 1, 3, 5; les trois points L, M, N sont situés respectivement sur les trois côtés de ce triangle; donc, pour démontrer qu'ils sont en ligne droite, il suffit de prouver que la relation

$$\frac{\overline{LQ}}{\overline{LR}} \times \frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \times \frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} = +1$$

est vérifiée. Or les autres côtés 2, 4, 6 de l'hexagone déterminent sur le périmètre du triangle PQR des rapports segmentaires dont le produit est égal à $+1$ :

$$\frac{\overline{LQ}}{\overline{LR}} \times \frac{\overline{ER}}{\overline{EP}} \times \frac{\overline{DP}}{\overline{DQ}} = +1,$$

$$\frac{\overline{MR}}{\overline{MP}} \times \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} = +1,$$

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{NQ}} \times \frac{\overline{AQ}}{\overline{AR}} \times \frac{\overline{FR}}{\overline{FP}} = +1.$$

En multipliant membre à membre, et en tenant compte des trois relations

$$\overline{CP} \times \overline{DP} = \overline{EP} \times \overline{FP},$$

$$\overline{AQ} \times \overline{BQ} = \overline{CQ} \times \overline{DQ},$$

$$\overline{ER} \times \overline{FR} = \overline{AR} \times \overline{BR},$$

on obtient précisément la relation annoncée.

217. *Cas particuliers.* — Supposons (fig. 205) que le point F se rapproche indéfiniment du point A jusqu'à se confondre avec lui ; le côté 6 devient la tangente en A et l'on peut regarder cette tangente comme le sixième côté d'un hexagone inscrit dont les cinq premiers côtés sont les côtés du pentagone ABCDE ; les points de concours L, M, N des trois couples de côtés opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 ne cessent pas d'être en ligne droite.

De la même façon, si l'on imagine que deux ou trois couples de sommets consécutifs de l'hexagone primitif viennent à se confondre, les côtés correspondants deviennent des tangentes,

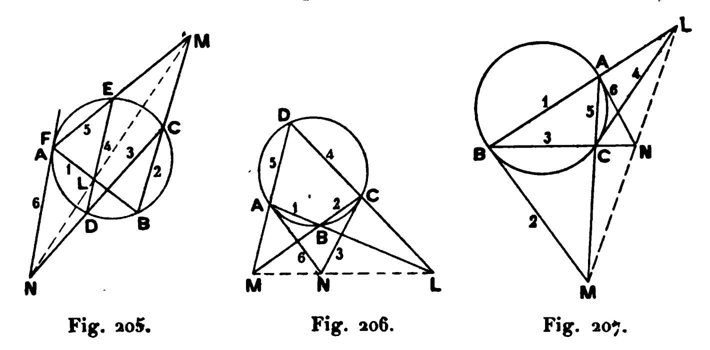



Fig. 205. Fig. 206. Fig. 207.

et, en faisant jouer à ces tangentes le rôle des côtés qu'elles remplacent, le théorème de Pascal subsiste. On obtient ainsi, en particulier, les théorèmes suivants :

*Les tangentes en deux sommets opposés* A *et* C (fig. 206) *d'un quadrilatère* ABCD *inscrit à un cercle, se coupent en un point situé sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés.*

*Les tangentes aux sommets d'un triangle inscrit à un cercle rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite* (fig. 207).

218. **Théorème de Céva.** — *Les droites joignant les sommets d'un triangle* ABC (fig. 208) *à un point* P *du plan du triangle, déterminent sur les côtés du triangle des rapports segmentaires dont le produit est égal à — 1 ; et réciproquement.*

Soient D, E, F les points de rencontre de PA, PB, PC avec les côtés BC, CA, AB, respectivement opposés aux sommets A, B, C. Je dis qu'on a

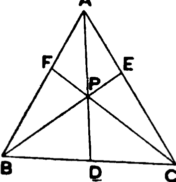


Fig. 208.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1. \qquad (1)$$

En effet, en considérant les triangles ABD, ADC coupés par les transversales FPC, EPB, on a [215]

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} \times \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = +1,$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = +1;$$

en multipliant membre par membre, et simplifiant,

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \times \frac{\overline{CB}}{\overline{BC}} = +1;$$

d'où l'on déduit la relation (1) en remarquant que

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \quad \text{et que} \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{BC}} = -1.$$

Réciproquement, *si* D, E, F *sont trois points situés respectivement sur les côtés* BC, CA, AB, *ou sur leurs prolongements, et tels que la relation* (1) *soit vérifiée, il en résulte que les trois droites* AD, BE, CF *sont concourantes.*

En effet, soit P le point de concours des droites AD, BE et soit F′ le point où la droite CP rencontre AB ; on aura

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}} = -1;$$

donc

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{F'A}}{\overline{F'B}},$$

ce qui prouve que les points F et F′ coïncident.

219. Corollaire. — *Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point, ainsi que les trois bissectrices et les trois hauteurs.*

En effet,

1° Si AD, BE, CF sont les trois médianes du triangle ABC (fig. 208), la relation (1) est vérifiée parce que chacun des trois rapports qui composent le premier membre est égal à — 1.

2° Si AD, BE, CF sont les trois bissectrices, on a

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC},$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\frac{BC}{BA},$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{CA}{CB};$$

en multipliant membre à membre, on obtient la relation (1).

3° Si AD, BE, CF sont les trois hauteurs, les quatre points B, C, E, F sont sur la circonférence de diamètre BC; donc

$$\overline{AF} \times \overline{AB} = \overline{AE} \times \overline{AC};$$

on trouve de même

$$\overline{BD} \times \overline{BC} = \overline{BF} \times \overline{BA},$$

$$\overline{CE} \times \overline{CA} = \overline{CD} \times \overline{CB};$$

en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\overline{AF} \times \overline{BD} \times \overline{CE} = -\overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD};$$

d'où l'on déduit aisément la relation (1).

### RAPPORT ANHARMONIQUE

220. Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, nous appellerons *rapport anharmonique* de ces quatre points et nous désignerons par la notation (ABCD) le rapport

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

221. *Le rapport anharmonique de quatre points ne change pas quand on permute deux de ces points, pourvu que l'on permute en même temps les deux autres.* En effet,

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}.\overline{DB}}{\overline{CB}.\overline{DA}}$$

$$= \frac{\overline{DB}.\overline{CA}}{\overline{DA}.\overline{CB}} = \frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{\overline{AD}.\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}.\overline{AC}}{\overline{BC}.\overline{AD}};$$

c'est-à-dire

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

222. **Théorème fondamental.** — *Le rapport anharmonique des points d'intersection d'un faisceau de quatre droites concou-*

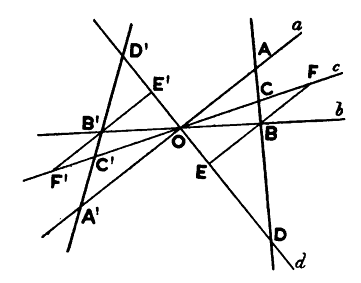



Fig. 209.

*rantes avec une transversale quelconque est indépendant de la position de cette transversale.*

Soit (fig. 209) O.*abcd* un faisceau de quatre droites concourantes coupées en A, B, C, D par une transversale; menons par B la parallèle à O*a*, qui rencontre O*d* en E, O*c* en F. On a

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BF}}, \qquad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BE}};$$

d'où

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \text{ou} \quad (ABCD) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BF}}.$$

En faisant les mêmes raisonnements pour une deuxième transversale A′B′C′D′, on trouvera

$$(A'B'C'D') = \frac{\overline{B'E'}}{\overline{B'F'}} .$$

Mais, comme EF et E′F′ sont parallèles, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{B'E'}}{\overline{B'F'}}$; donc

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Le rapport (ABCD) est donc indépendant de la position de la transversale; on l'appelle le *rapport anharmonique du faisceau* et on le représente par la notation (O.*abcd*).

Le théorème subsiste évidemment dans le cas où les quatre droites *a*, *b*, *c*, *d*, sont parallèles.

223. Quand le rapport (O.*abcd*) est égal à — 1, on dit que le faisceau O.*abcd* est *harmonique*, que les droites O*c*, O*d* sont *conjuguées harmoniques par rapport aux droites* O*a*, O*b* et *vice versa*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = -1$, c'est-à-dire que le point B soit le milieu de EF; d'où ce théorème :

*Pour que les droites* O*c*, O*d* *soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites* O*a*, O*b*, *il faut et il suffit que le segment qu'elles interceptent sur une parallèle à* O*a* *soit divisé en deux parties égales par* O*b*.

224. Il en résulte que, étant données trois droites concourantes O*a*, O*b*, O*c* (fig. 209), pour construire la conjuguée de O*c* par rapport à O*a*, O*b*, il n'y a qu'à mener une parallèle à O*a* rencontrant O*b* en B, O*c* en F, prolonger FB d'une longueur BE égale à FB et tracer OE, qui est la droite cherchée.

### POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN SYSTÈME DE DEUX DROITES

225. On dit que deux points P et Q sont *conjugués harmoniques par rapport à un système de deux droites*, lorsque ces

points sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la droite PQ avec les deux droites du système.

226. **Théorème.** — *Le lieu géométrique des conjugués harmoniques d'un point* P *par rapport à un système de deux droites concourantes* OX, OY (fig. 210) *est une droite passant par le point de concours de ces deux droites.*

En effet, si Q est un point conjugué harmonique de P par rapport aux deux droites OX, OY, c'est-à-dire par rapport aux points A et B où la droite PQ rencontre OX, OY, le faisceau O.PQAB est harmonique; par conséquent, le point Q se trouve sur la droite OZ conjuguée de OP par rapport aux droites OX, OY. Et réciproquement. Il en résulte que le lieu

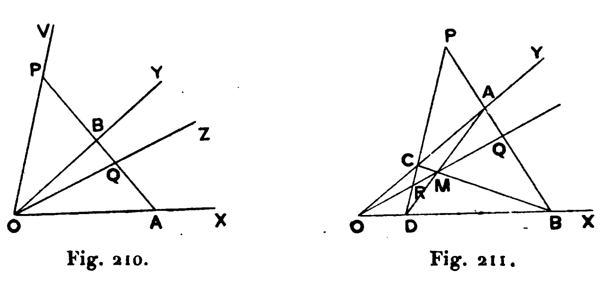


Fig. 210. Fig. 211.

demandé est une droite OZ passant par O et on voit, en outre, que ce lieu reste le même quand le point P se déplace sur une droite passant par O.

Cette droite OZ s'appelle la *polaire* de P par rapport au système des deux droites OX, OY, ou par rapport à l'un quelconque des angles qu'elles forment. On peut la construire par le procédé indiqué au n° 224.

Voici une autre construction au moyen de la règle seule : menons par P (fig. 211) deux sécantes rencontrant OX en B et D, OY en A et C et traçons les droites AD, BC, qui se coupent en un point M. Je dis que OM est la polaire de P par rapport à l'angle XOY. En effet, soient Q et R les conjugués de P par rapport à AB et à CD. La droite QR étant la polaire de P par rapport à l'angle XOY et aussi par rapport à l'angle AMB passe

par les sommets O et M de ces deux angles; donc OM est la polaire cherchée.

227. On démontre de même que le lieu des conjugués harmoniques d'un point P par rapport à un système de deux droites parallèles est une droite qui leur est parallèle. Cette droite, qui ne change pas quand le point P se déplace sur une parallèle aux deux droites données, s'appelle la *polaire* du point P par rapport à ces deux droites ; on la construit, au moyen de la règle, par le procédé indiqué ci-dessus.

### QUADRILATÈRE COMPLET

228. On appelle *quadrilatère complet* la figure formée par quatre droites indéfinies OA, OB, AD, BC (fig. 211); ces quatre droites s'appellent les *côtés* et les six points d'intersection de ces droites deux à deux s'appellent les *sommets* du quadrilatère. On dit que deux sommets sont *opposés* quand ils ne sont pas situés sur un même côté. Il y a trois couples de sommets opposés O et M, A et B, C et D; les droites OM, AB, CD qui les joignent s'appellent les *diagonales* du quadrilatère.

229. **Théorème.** — *Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.* En effet, soient P, Q, R les points d'intersection de ces diagonales. OM est la polaire de P par rapport à l'angle AOB ; donc les quatre points A, B, P, Q forment une division harmonique, c'est-à-dire que la diagonale AB est divisée harmoniquement par les deux autres. Pour la même raison, les quatre points C, D, R, P forment aussi une division harmonique. Enfin, il en est de même des points O, M, Q, R, parce que PM est la polaire de O par rapport à l'angle APC.

### POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

230. Soient (fig. 212 et 213) P et Q deux points du plan d'un cercle de centre O et de rayon R; et soit C le pied de la per-

pendiculaire abaissée du centre sur la droite PQ. Si cette droite rencontre le cercle en deux points A et B conjugués harmoniques par rapport à PQ, comme C est le milieu de AB, on a

$$\overline{CP}\cdot\overline{CQ} = \overline{CA}^2,$$

ou

$$\overline{CP}\cdot\overline{CQ} = R^2 - \overline{OC}^2. \qquad (1)$$

Réciproquement, si cette relation est vérifiée et que la droite PQ rencontre le cercle en deux points A et B, ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à PQ; mais il peut arriver que cette relation soit vérifiée sans que la droite PQ rencontre le cercle.

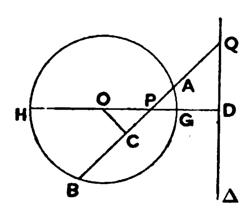


Fig. 212.

Dans tous les cas, que la droite PQ rencontre le cercle ou non, nous dirons que les deux points P et Q sont *conjugués harmoniques par rapport au cercle* O, s'ils vérifient la relation (1).

Cette relation exprime que la puissance $\overline{OC}^2 - R^2$ du pied C de la perpendiculaire abaissée du centre sur PQ est égale à $-\overline{CP}.\overline{CQ}$. On peut mettre cette relation sous diverses autres formes remarquables.

D'abord, en remplaçant $\overline{CQ}$ par $\overline{CP} + \overline{PQ}$, on a

$$\overline{CP}^2 + \overline{CP}\cdot\overline{PQ} = R^2 - \overline{OC}^2,$$

d'où

$$\overline{OP}^2 - R^2 = \overline{PC}\cdot\overline{PQ}. \qquad (2)$$

Comme les points P et Q jouent le même rôle, on a, par analogie,

$$\overline{OQ}^2 - R^2 = \overline{QC}.\overline{QP}. \qquad (3)$$

Enfin, si l'on abaisse QD perpendiculaire sur OP, les quatre points O, C, Q, D sont sur le cercle de diamètre OQ ; donc $\overline{PC}.\overline{PQ} = \overline{PO}.\overline{PD}$ et la relation (2) devient

$$R^2 = \overline{OP}(\overline{OP} + \overline{PD}),$$

ou

$$R^2 = \overline{OP}.\overline{OD}. \qquad (4)$$

Les relations (2), (3) et (4) sont équivalentes à la relation (1) et peuvent, par conséquent, servir à définir la *conjugaison harmonique* des points P et Q par rapport au cercle. Nous allons les interpréter géométriquement.

La relation (4) signifie [199] que le cercle O et le cercle de diamètre PQ sont orthogonaux. Donc

*Pour que deux points* P *et* Q *soient conjugués harmoniques par rapport à un cercle* O, *il faut et il suffit que le cercle de diamètre* PQ *soit orthogonal au cercle* O.

La relation (3) exprime que le point Q a même puissance par rapport au cercle O et par rapport au cercle de diamètre OP et, par suite, est situé sur l'axe radical Δ de ces deux cercles. D'où ce théorème :

231. **Théorème.** — *Le lieu des conjugués harmoniques d'un point* P *par rapport à un cercle* O *est une droite perpendiculaire au diamètre* OP *qui passe par ce point.*

232. Cette droite Δ s'appelle la *polaire du point* P *par rapport au cercle* O.

Le point D où elle rencontre la droite OP est conjugué harmonique de P par rapport au diamètre GH ; donc

$$\overline{OD} \times \overline{OP} = \overline{OG}^2 = R^2. \qquad (1)$$

Cette relation nous montre que, étant donnée une droite quelconque Δ, il existe un point P, et un seul, dont cette droite soit la polaire : ce point P s'appelle le *pôle de* Δ *par rapport au cercle* O.

Si le point P est sur la circonférence, OP = R, donc aussi OD = R, c'est-à-dire que *la polaire d'un point de la circonférence est la tangente en ce point.*

Faisons décrire au point P le prolongement du rayon OG (fig. 213); comme $\overline{OD}.\overline{OP}$ reste constant, à mesure que le point P s'éloigne, le point D se rapproche du centre et, si le point P s'éloigne indéfiniment, la distance OD tend vers zéro. Au contraire, faisons décrire au point P le rayon GO (fig. 212); à mesure que le point P se rapproche du centre, OD augmente

et, quand le point P sera venu se confondre avec le centre O, sa polaire sera rejetée à l'infini.

Dans le cas où le point P est *extérieur* au cercle O (fig. 213), la polaire Δ de ce point n'est autre que la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de ce point. Cela résulte de ce que cette polaire est l'axe radical du cercle O et du cercle de diamètre OP.

Pour le démontrer directement, menons par P une sécante qui rencontre le cercle en A et B et soit Q le conjugué harmonique de P par rapport à AB. Faisons tourner la sécante autour du point P, jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en E ou en F. Les points d'intersection, A et B, étant confondus avec le point de contact, il en est de même du point Q, conjugué de

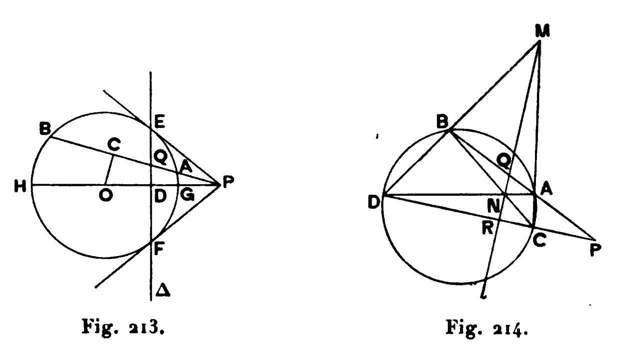



Fig. 213. Fig. 214.

P par rapport à ces deux points A et B. Il en résulte que la polaire Δ doit passer par les points de contact E et F des tangentes issues de P.

233. *Construction de la polaire d'un point* P *par rapport à un cercle au moyen de la règle.* — Menons par le point P (fig. 214) deux sécantes rencontrant le cercle, l'une en A et B, l'autre en C et D. Traçons les droites AC, BD, qui se rencontrent en M, puis les droites AD et BC, qui se rencontrent en N. Je dis que MN est la polaire de P par rapport au cercle. En effet, soient Q et R les conjugués de P par rapport à AB et à CD. La droite QR est la polaire de P par rapport au cercle et aussi par rapport à chacun des angles AMB, ANB; donc elle passe par les

**sommets M et N de ces deux angles; donc elle coïncide avec la droite MN.**

234. ***Théorème fondamental.*** — *Si un point* Q (fig. 215) *est situé sur la polaire d'un autre point* P, *réciproquement le point* P *est situé sur la polaire du point* Q, car les points P et Q sont conjugués par rapport au cercle.

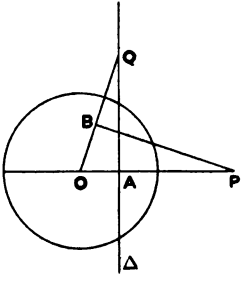



Fig. 215.

En d'autres termes, *si deux droites* PB, AQ *sont telles que la première passe par le pôle de la seconde, réciproquement, la seconde passe par le pôle de la première :* c'est ce qu'on exprime en disant que ces deux droites sont *conjuguées par rapport au cercle.*

235. Corollaires. — I. — *Quand un point* Q *décrit une droite fixe* Δ, *sa polaire tourne autour du pôle* P *de la droite* Δ, *et, réciproquement, si une droite tourne autour d'un point fixe* P, *son pôle décrit la droite* Δ, *polaire du point* P.

II. — *La polaire du point de rencontre de deux droites est la droite qui passe par les pôles de ces deux droites.*

III. — *Le pôle d'une droite passant par deux points est le point commun aux polaires de ces deux points.*

236. ***Théorème.*** — *Etant donnés un cercle et deux points* A *et* B (fig. 216), *les distances de ces points au centre* O *du cercle sont entre elles comme les distances de chacun d'eux à la polaire de l'autre.*

Soient Δ, Δ′ les polaires des points A, B; soient C, D les points d'intersection de Δ et de OA, de Δ′ et de OB. On a d'abord

$$\overline{OA}.\overline{OC} = \overline{OB}.\overline{OD}, \qquad (1)$$

Fig. 216.

puisque chacun de ces deux produits est égal au carré du rayon.

Abaissons AE perpendiculaire sur OB et BF perpendiculaire sur OA ; les quatre points A, B, E, F étant sur la circonférence de diamètre AB, on a

$$\overline{OA}.\overline{OF} = \overline{OB}.\overline{OE}\,; \qquad (2)$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\overline{OA}.\overline{FC} = \overline{OB}.\overline{ED}.$$

Mais, en abaissant AG perpendiculaire sur $\Delta'$ et BH perpendiculaire sur $\Delta$, on a $\overline{AG} = \overline{ED}$ et $\overline{BH} = \overline{FC}$. Donc enfin

$$\overline{OA}.\overline{BH} = \overline{OB}.\overline{AG}, \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BH}}.$$

### POLAIRES RÉCIPROQUES

237. Étant donnés un cercle C appelé *cercle directeur*, et une figure F composée de points et de droites, on peut considérer la figure F′ formée par les polaires de ces points et les pôles de ces droites par rapport au cercle C ; ces deux figures F et F′ s'appellent *polaires réciproques*. Le passage d'une figure à l'autre s'appelle *transformation par polaires réciproques*. A toute propriété de la première figure correspond une propriété *corrélative* de la seconde. Par exemple, si trois points *a*, *b*, *c* de la première figure sont sur une droite D, les droites correspondantes de la seconde figure, c'est-à-dire les polaires A′, B′, C′ de *a*, *b*, *c* passent par le pôle *d′* de la droite D [235, I].

238. **Théorème de Brianchon** (corrélatif du théorème de Pascal). — *Les droites qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à un cercle sont concourantes.*

En effet, étant données (fig. 217) six tangentes à un cercle, rangeons-les, par la pensée, dans un ordre quelconque ; appelons 1 le point de rencontre de la première tangente avec la deuxième, 2 celui de la deuxième avec la troisième, ..., 6 celui de la sixième avec la première. Puis transformons la figure par polaires réciproques, en prenant pour cercle directeur le cercle

inscrit; à l'hexagone circonscrit 123456 correspond un hexagone inscrit dont les côtés 1', 2',..., 6' sont les polaires des sommets 1, 2,..., 6 du premier. Le point de rencontre L' des côtés opposés 1', 4' est [235, III] le pôle de la droite 14; de même, le point de rencontre M' des côtés 2', 5' est le pôle de 25 et le point de rencontre N' des côtés 3', 6' est le pôle de 36; les points L', M', N' (qu'il est inutile de marquer sur la figure) étant en ligne droite, en vertu du théorème de Pascal, leurs polaires 14, 25, 36 se coupent en un point P, qui est le pôle de L'M'N'.

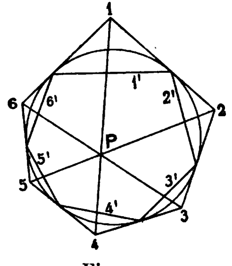


Fig. 217.

239. Cas particuliers. — Étant données deux tangentes à un cercle, si le point de contact de la première se rapproche indéfiniment de celui de la seconde, le point de rencontre de ces deux tangentes a pour limite le point de contact de la seconde. Cette remarque permet d'appliquer le théorème de Brianchon à un pentagone, à un quadrilatère et même à un triangle circonscrit à une conique.

Soit (fig. 218) un pentagone BCDEF circonscrit à un cercle; A étant le point de contact du côté FB, par exemple, on regarde

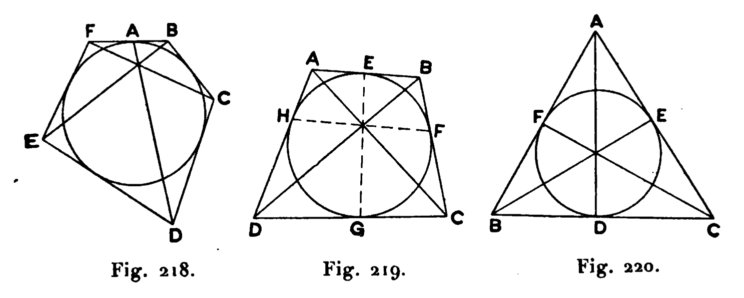


Fig. 218. Fig. 219. Fig. 220.

ABCDEF comme un hexagone circonscrit; il en résulte que AD passe par le point de rencontre des diagonales BE et CF.

En second lieu, considérons un quadrilatère ABCD (fig. 219) circonscrit à un cercle; E, F, G, H étant les points de contact des côtés AB, BC, CD, DA, on regarde AEBCGD et ABFCDH

comme des hexagones circonscrits ; il en résulte que les droites EG, FH qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par le point de rencontre des diagonales AC et BD.

Enfin, soit (fig. 220) un triangle ABC circonscrit à un cercle ; D, E, F étant les points de contact des côtés BC, CA, AB, on regarde AFBDCE comme un hexagone circonscrit ; il en résulte que les droites AD, BE, CF, qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés, sont concourantes.

### INVERSION

240. Étant donnés (fig. 221) un point O et un nombre $\lambda$, positif ou négatif, à tout point A du plan, on peut faire correspondre le point A′ de la droite OA défini par la relation

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \lambda.$$

Si l'on fait décrire au point A une figure F, le point A′ décrit une figure F′ qu'on appelle la *figure inverse* de F ; le point O s'appelle le *pôle d'inversion* et le nombre $\lambda$ la *puissance d'inversion*. Réciproquement, F est la figure inverse de F′ ; c'est ce qu'on exprime en disant que les figures F et F′ *sont réciproques*.

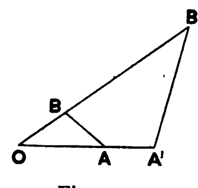


Fig. 221.

Quand la puissance $\lambda$ est positive, en posant $\lambda = + R^2$, on voit que deux points correspondants A, A′ sont conjugués par rapport au cercle ayant pour rayon R et pour centre O.

241. Deux couples de points correspondants A et A′, B et B′, sont situés sur un même cercle ; car

$$\overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \lambda.$$

Il en résulte que les droites AB, A′B′ sont antiparallèles par rapport aux droites AA′, BB′. En outre, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}};$$

donc les triangles OAB, OB′A′ sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels.

Par conséquent,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.\,OA'}{OA.\,OB} = \frac{\lambda'}{OA.\,OB};$$

d'où,

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda'}{OA.\,OB},$$

$\lambda'$ désignant la valeur absolue de la puissance $\lambda$.

Nous verrons plus loin la portée de cette remarque.

242. ***Théorème.*** — *Deux figures* F′, F″, *inverses d'une même figure* F *par rapport à un même pôle* O *et à deux puissances différentes* $\lambda', \lambda''$, *sont homothétiques.*

O M M′ M″

Fig. 222.

En effet, soient (fig. 222) M, un point de la figure F, M′ et M″ les points correspondants des figures F′ et F″. On a

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \lambda', \qquad \overline{OM}.\overline{OM''} = \lambda'';$$

d'où

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM''}} = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Donc les figures F′ et F″ sont homothétiques ; le point O est le centre et $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ le rapport d'homothétie.

243. Corollaire. — *La figure inverse d'un cercle* C *qui ne passe pas par le pôle est un cercle.* En effet, si l'on prend pour puissance d'inversion la puissance du pôle par rapport au cercle C, la figure inverse du cercle C est ce cercle lui-même ; donc, si l'on prend une autre puissance quelconque, la figure inverse du cercle C est une figure homothétique au cercle C, c'est-à-dire un cercle.

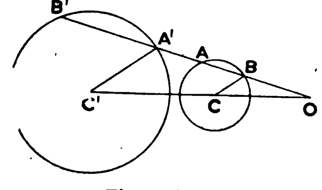



Fig. 223.

Pour le construire, joignons (fig. 223) le pôle O à un point A quelconque du cercle C et prenons sur OA un point A′ tel que

$$\overline{OA}.\overline{OA}' = \lambda,$$

$\lambda$ étant la puissance d'inversion. Le cercle cherché passera par A′; il suffit de trouver son centre. Soit B le second point de rencontre de OA avec le cercle C et $p$ la puissance du pôle par rapport à ce cercle :

$$\overline{OA}.\overline{OB} = p;$$

d'où

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\lambda}{p}.$$

Donc, quand la sécante tourne autour du point O, les points A′ et B décrivent deux figures homothétiques ; donc le point A′ décrit un cercle dont le centre C′ est à l'intersection de OC et de la parallèle à BC menée par A′.

Remarque. — On a

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\lambda}{p}.$$

Par analogie, en appelant $p'$ la puissance du pôle par rapport au cercle C′, on a

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = \frac{\lambda}{p'};$$

d'où

$$pp' = \lambda^2.$$

Enfin, les rayons R, R′ des deux cercles sont liés par la relation

$$\frac{R'}{R} = \left|\frac{\lambda}{p}\right| = \left|\frac{p'}{\lambda}\right|.$$

Ces formules nous serviront plus loin.

244. Réciproquement, *deux cercles quelconques* C *et* C′ *peuvent être regardés comme inverses de deux façons différentes.*

En effet, soit O (fig. 223), le centre d'homothétie directe de

ces deux cercles, c'est-à-dire le point fixe par lequel passe la droite qui joint les extrémités de deux rayons CB, C'A' parallèles et de même sens ; on a

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = +\frac{R'}{R},$$

R et R' étant les rayons des deux cercles. Soit $p$ la puissance du point O par rapport au cercle C ; on a

$$\overline{OA}.\overline{OB} = p;$$

d'où, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = p\frac{R'}{R}.$$

Donc le cercle C' est l'inverse du cercle C, relativement au pôle O et à la puissance $\frac{pR'}{R}$.

Les points A et A', qui se correspondent dans cette inversion, sont appelés *antihomologues*, par opposition aux points A' et B, qui sont *homologues* dans l'homothétie définie par le centre O et le rapport $\frac{R'}{R}$.

Tout ce que nous venons de dire s'applique au centre d'homothétie inverse ; donc deux cercles peuvent être regardés comme inverses de deux façons différentes.

245. Sur chaque sécante passant par l'un des centres d'homothétie, il y a deux couples de points homologues : B et A', A et B', et deux couples de points antihomologues : A et A', B et B' (fig. 223).

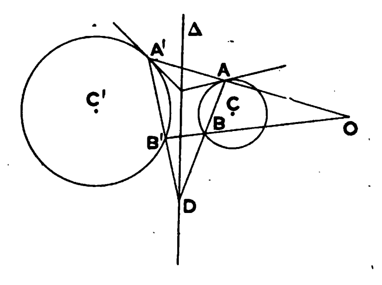


Fig. 224.

Soient (fig. 224) A et A', B et B' deux couples de points antihomologues, situés sur deux sécantes passant par un centre d'homothétie O. Les cordes AB, A'B' sont appelées *antihomologues* ; comme

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'},$$

les quatre points A, A′, B, B′ sont sur un même cercle et, en appelant D le point de rencontre de AB et de A′B′, on a

$$\overline{DA}.\overline{DB} = \overline{DA'}.\overline{DB'}.$$

Donc le point D a même puissance par rapport aux deux cercles C et C′ et, par suite, est situé sur l'axe radical de ces deux cercles.

D'où ce théorème :

*Deux cordes antihomologues se coupent sur l'axe radical.*

Ce théorème subsiste quand la sécante OBB′ vient se confondre avec la sécante OAA′; mais alors les cordes AB, A′B′ deviennent les tangentes en A et en A′. Par conséquent,

*Les tangentes en deux points antihomologues se coupent sur l'axe radical.*

246. ***Théorème.*** — *La figure inverse d'un cercle* C *qui passe par le pôle* O (fig. 225) *est une droite perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle.*

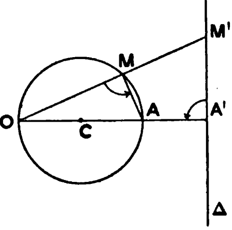



Fig. 225.

En effet, soient M′ le point inverse d'un point quelconque M du cercle et A′ le point inverse de l'extrémité A du diamètre qui passe par le pôle; les droites AM, A′M′ sont antiparallèles par rapport aux droites OA, OM, c'est-à-dire que les angles (OM, MA), (A′M′, OA′) sont égaux; mais l'angle (OM, MA) est droit comme inscrit à une demi-circonférence, donc l'angle (A′M′, OA′) l'est aussi. Par conséquent, le lieu du point M′, c'est-à-dire la figure inverse du cercle C, est la perpendiculaire au diamètre OA menée par le point A′.

Réciproquement, on prouve de la même façon que *la figure inverse d'une droite* Δ, *ne passant pas par le pôle d'inversion, est un cercle qui passe par le pôle et dont le centre est situé sur la perpendiculaire abaissée du pôle sur la droite* Δ.

Quant à la figure inverse d'une droite passant par le pôle, c'est évidemment cette droite elle-même.

247. **Théorème fondamental.** — *L'inversion conserve les angles.*

Soient (fig. 226) $\Gamma$, $\Gamma'$ deux courbes inverses, A et A′, B et B′ deux couples de points correspondants ; les droites AB, A′B′ sont antiparallèles par rapport aux droites AA′, BB′, c'est-à-dire que les angles (AB, AA′), (BB′, A′B′) sont égaux. Supposons que la sécante OBB′ se rapproche indéfiniment de la

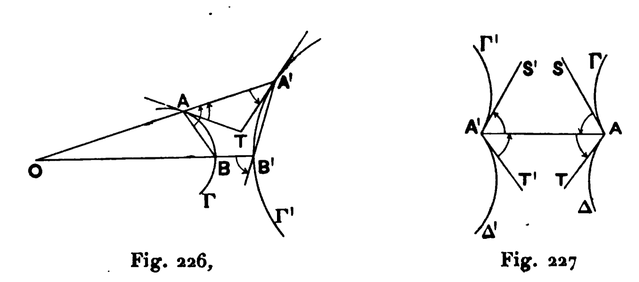



Fig. 226, Fig. 227

sécante OAA′ ; les droites AB, A′B′ ont pour limites respectives les tangentes AT, A′T′ aux deux courbes $\Gamma$, $\Gamma'$ en A, A′. Par conséquent,

$$(AT, AA') = (AA', A'T').$$

En d'autres termes, *les tangentes en deux points correspondants de deux courbes inverses sont symétriques par rapport à la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint les points de contact.*

Cela posé, considérons (fig. 227) deux courbes $\Gamma$, $\Delta$, qui se coupent en un point A ; leurs inverses $\Gamma'$, $\Delta'$ se couperont au point A′, inverse de A. L'angle des deux courbes $\Gamma$, $\Delta$ est, par définition, l'angle de leurs tangentes en A : AS et AT ; l'angle des deux courbes $\Gamma'$, $\Delta'$ est l'angle de leurs tangentes en A′ : A′S′ et A′T′. Mais

$$(AA', AT) = (A'T', AA'),$$
$$(AS, AA') = (AA', A'S') ;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$(AS, AT) = (A'T', A'S').$$

Donc l'angle de $\Gamma$ avec $\Delta$ est égal à l'angle de $\Delta'$ avec $\Gamma'$ : c'est

ce que nous avons exprimé en disant que l'inversion conserve les angles ; mais il importe de remarquer que l'angle (A'T', A'S') est égal à (AS, AT) et non à (AT, AS).

248. Corollaires. — I. — *Quand deux courbes sont tangentes, leurs inverses le sont aussi.*

II. — *Quand deux courbes sont orthogonales, leurs inverses le sont aussi.*

### SYSTÈMES DE CERCLES ORTHOGONAUX

249. Le lieu des points, dont le rapport des distances à deux points fixes A, A' est égal à une constante $k$, est un cercle dont le diamètre passant par A et A' est partagé harmoniquement par ces deux points. A chaque valeur de $k$ correspond un pareil cercle ; on a ainsi *une famille* de cercles. A $k = o$ correspond un cercle réduit à l'un des points A ou A' et à $k$ infini un cercle réduit à l'autre de ces deux points ; enfin, pour $k = 1$, on obtient la perpendiculaire élevée au milieu de AA'. En menant par ces deux points A, A' tous les cercles possibles, on a une seconde *famille* de cercles. Un cercle quelconque de la première famille et un cercle de la seconde sont orthogonaux [199].

La droite AA' est l'axe radical commun à tous les cercles de la seconde famille et la perpendiculaire au milieu O de AA' est l'axe radical commun à tous ceux de la première.

Les points A et A' se nomment les *points limites* de la première famille parce qu'ils correspondent aux cas limites $k = 0$, $k = \infty$, pour lesquels les cercles se réduisent précisément à ces points.

La polaire de l'un des points limites par rapport à tous les cercles de la première famille passe par l'autre point limite et est perpendiculaire à la droite qui les joint.

Enfin la puissance du point O commun aux deux axes radicaux par rapport aux cercles de la première famille est égale à $+ \overline{OA}^2$, et par rapport à ceux de la seconde à $- \overline{OA}^2$.

250. Je dis maintenant que tout système de deux familles de cercles orthogonaux se compose de deux familles ayant cha-

cune un axe radical commun, les deux axes radicaux étant perpendiculaires et, en outre, un seul de ces axes coupant les cercles de la famille correspondante. En d'autres termes, il n'y a pas d'autres familles de cercles orthogonaux que celles qui ont été définies dans le paragraphe précédent.

En effet, soient C, C′ deux cercles de la première famille ; tout cercle D qui coupe C et C′ à angle droit a son centre sur l'axe radical de C et C′ ; donc les cercles de la seconde famille ont leurs centres sur une droite $\Delta$ perpendiculaire à la ligne des centres des deux cercles C, C′ ; pour la même raison les cercles de la première famille ont leurs centres sur une ligne droite $\Delta'$, et il résulte de ce qui précède que les deux droites $\Delta$, $\Delta'$ sont perpendiculaires et que deux cercles quelconques de la première famille ont pour axe radical $\Delta$, de même que $\Delta'$ est l'axe radical de deux cercles quelconques de la seconde famille. Cela étant, si $\Delta'$ coupe l'un des cercles de la seconde famille D en deux points A, A′, tous les cercles de cette famille passeront par A et A′ ; en outre, A et A′ diviseront harmoniquement le diamètre de l'un quelconque C des cercles de la première famille porté par la droite $\Delta'$. La puissance du milieu O de AA′ par rapport à ce cercle C étant alors égale à $\overline{OA}^2$, le point O est extérieur à C, et, par suite, les cercles de la première famille ne coupent pas leur axe radical. Ainsi, si l'on suppose que l'un des axes radicaux coupe les cercles correspondants, l'autre ne les coupe pas. Réciproquement, supposons que l'un des axes radicaux, par exemple $\Delta$, ne soit pas sécant ; je dis que $\Delta'$ coupera les cercles de l'autre famille. En effet, par hypothèse, O est extérieur à tout cercle de la première famille ; donc la puissance de ce point est positive et la même pour tous les cercles ; soit $n^2$ cette puissance. Prenons sur $\Delta'$ deux points A, A′ à une distance de O égale à $n$ ; tout cercle mené par A et A′ coupe orthogonalement les cercles de la première famille et appartient, par suite, à la seconde ; donc, tous les cercles de cette famille coupent $\Delta'$ en A et A′, et l'on voit que l'on retombe sur les cercles considérés tout d'abord, puisque tout cercle de la première famille jouit de la propriété que le rapport des distances de l'un quelconque de ses points aux points A, A′ est constant.

251. Ce qui précède va nous permettre de démontrer la proposition suivante :

*L'inverse d'une famille de cercles ayant un axe radical commun est une seconde famille ayant aussi un axe radical commun.*

La proposition est évidente, si les cercles considérés ont deux points communs, car les cercles inverses ont en commun les inverses des deux premiers points.

Considérons des cercles ayant un axe radical Δ qui ne les coupe pas. Ces cercles forment une famille que nous avons étudiée plus haut ; la famille orthogonale passe par deux points fixes A, A′, situés sur la droite Δ′ qui contient tous les centres des premiers cercles. Par inversion, on obtient deux familles orthogonales ; donc, aux cercles de la première famille, correspondent aussi des cercles ayant un axe radical commun. D'ailleurs on peut trouver cette droite : en effet, parmi les cercles de la seconde famille, il y en a un qui passe par le pôle d'inversion S ; c'est le cercle circonscrit au triangle SAA′. Ce cercle a pour inverse une droite qui est orthogonale à tous les cercles qui constituent l'inverse de la première famille et, par suite, est la ligne de leurs centres. Aux points A, A′ correspondent deux points *a*, *a*′, par lesquels passent les inverses de la seconde famille ; l'axe radical cherché est la perpendiculaire élevée au milieu de *aa*′.

## Applications de l'inversion

252. La transformation par inversion est une des méthodes les plus fécondes pour la résolution des problèmes, aussi bien que pour la démonstration des théorèmes et pour la découverte de vérités nouvelles.

253. Proposons-nous, par exemple, de construire un cercle passant par deux points donnés A, B et tangent à un cercle donné C. Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le point A ; au point B correspond un point B′, au cercle C correspond un cercle C′, et au cercle demandé, qui passe par le pôle, correspond une droite Δ′ passant par B′ et tangente au cercle C′. On construira cette droite Δ′ et la figure

inverse de cette droite sera le cercle demandé. On peut remarquer que le point de contact de ce cercle avec le cercle C est le point inverse du point de contact de la droite $\Delta'$ avec le cercle C'.

254. Comme deuxième application, proposons-nous de construire un cercle tangent à trois cercles donnés (A, $a$), (B, $b$), (C, $c$), *dont les centres sont en ligne droite.*

1° *Si ces trois cercles n'ont pas même axe radical,* il suffit de transformer la figure par inversion, en prenant pour pôle un point de l'axe radical de A et de B, non situé sur la droite AB, et, pour puissance, la puissance de ce point par rapport à ces deux cercles A et B : ces deux cercles ne changent pas, le cercle C se transforme en un autre cercle dont le centre n'est plus sur la droite AB ; donc on peut appliquer la méthode du n° 213.

D'ailleurs, il est aisé de calculer directement les rayons des cercles tangents aux trois cercles donnés. Soit, par exemple, $r$ le rayon du cercle tangent *extérieurement* à ces trois cercles, et soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les puissances des points A, B, C par rapport à ce cercle. Comme ces trois points sont en ligne droite, on a

$$\alpha.\overline{BC} + \beta.\overline{CA} + \gamma.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0.$$

Mais :

$$\alpha = a^2 + 2ar, \qquad \beta = b^2 + 2br, \qquad \gamma = c^2 + 2cr.$$

En substituant dans l'équation précédente, on aura la valeur de $r$.

2° *Si les trois cercles donnés ont même axe radical,* il ne servirait à rien de faire une inversion, car les centres des trois cercles transformés seraient encore en ligne droite [251]. Mais, dans ce cas, s'il existait un cercle tangent aux trois cercles donnés *en trois points différents,* les tangentes en ces trois points devraient se rencontrer en un même point de l'axe radical : ce qui est évidemment impossible. Il faut en conclure que, si les trois cercles donnés ne rencontrent pas leur axe radical, le problème proposé est impossible ; s'ils sont tangents à leur axe radical en un point M, tous les cercles tangents à cet axe

en M, et ceux-là seulement, répondent à la question. Enfin, s'ils coupent leur axe radical en deux points, il n'y a pas d'autres cercles tangents que ces deux points, que l'on peut considérer comme des cercles de rayon nul.

255. Nous croyons utile d'indiquer, pour la construction des cercles tangents à trois cercles donnés, une méthode due à M. Fouché, *qui s'applique à tous les cas*. Nous reproduisons presque textuellement le raisonnement de l'auteur (¹).

Soit $\omega$ un cercle tangent *de la même façon* aux trois cercles O, O′, O″ en A, A′, A″; nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il soit tangent *extérieurement* à ces trois cercles. Les points de contact A et A′ sont les centres d'homothétie inverse du cercle $\omega$ avec les cercles O et O′ ; donc la droite AA′ passe par le centre S″ d'homothétie directe des cercles O et O′ et les points A, A′ sont des points antihomologues de ces deux cercles. De même, la droite AA″ passe par le centre S′ d'homothétie directe des deux cercles O et O″, et les points A, A″ sont des points antihomologues de ces deux cercles. Prenons sur le cercle O un point arbitraire M; soit M′ l'antimologue de M sur le cercle O′, par rapport à S″, et soit M″ l'antihomologue de M sur le cercle O″, par rapport à S′; enfin, soit N le second point de rencontre du cercle O avec le cercle circonscrit au triangle MM′M″. Comme

$$\overline{S''A}.\overline{S''A'} = \overline{S''M}.\overline{S''M'},$$

le point S″ a même puissance par rapport aux cercles $\omega$ et MM′M″ ; il en est de même de S′ ; donc S′S″ est l'axe radical de ces deux cercles. Celui des cercles O et MM′M″ est MN ; celui des cercles O et $\omega$ est la tangente commune en A ; donc cette tangente commune passe par le point de rencontre H de S′S″ avec MN. Par conséquent, on aura le point A en menant par H une tangente au cercle O ; on en déduira les points A′, A″ en construisant les antihomologues de A sur les cercles O′, O″.

(¹) Nouvelles Annales, 1892, p. 236.

Reste à prouver que le cercle, passant par les trois points A, A$'$, A$''$ ainsi obtenus, répond à la question. En effet, S$'$S$''$ est l'axe radical des deux cercles AA$'$A$''$ et MM$'$M$''$, MH est celui des deux cercles MM$'$M$''$ et O ; donc les deux cercles AA$'$A$''$ et O ont pour axe radical la tangente AH, et, par suite, sont tangents en A. Si l'on transforme la figure par inversion, en prenant S$''$ pour pôle et $\overline{S''A}.\ \overline{S''A'}$ pour puissance d'inversion, l'inverse du cercle O est le cercle O$'$ et le cercle AA$'$A$''$ se transforme en lui-même; donc, puisqu'il est tangent au cercle O, il est aussi tangent au cercle O$'$. On prouve de même qu'il est tangent au cercle O$''$.

En remplaçant S$'$ ou S$''$ par les centres d'homothétie inverse de O avec O$'$ et O$''$, on obtient les trois autres groupes de cercles tangents.

Pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à l'article de M. Fouché.

256. Pour montrer comment l'inversion s'applique à la démonstration des théorèmes, considérons (fig. 228) un quadrilatère convexe OABC inscrit à un cercle. Transformons la figure par inversion, en prenant pour pôle le point O; au cercle correspond une droite $\Delta$ et aux points A, B, C, correspondent trois points A$'$, B$'$, C$'$, situés sur $\Delta$. De plus, le quadrilatère OABC étant convexe, le point B$'$ sera situé entre A$'$ et C$'$, donc

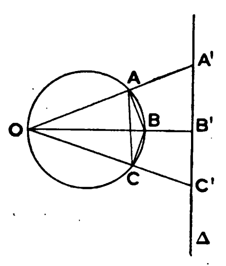


Fig. 228.

$$A'C' = A'B' + B'C'. \qquad (1)$$

Mais [241]

$$A'C' = AC \times \frac{\lambda'}{OA.\ OC},$$

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda'}{OA.\ OB},$$

$$B'C' = BC \times \frac{\lambda'}{OB.\ OC};$$

donc

$$\frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB}{OA.OB} + \frac{BC}{OB.OC},$$

ou

$$AC.OB = AB.OC + BC.OA; \qquad (2$$

ce qui démontre que, dans un quadrilatère convexe inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

*Réciproquement*, si la relation (2) est vérifiée, la relation (1) l'est aussi. On en conclut d'abord que les trois points A′, B′, C′, sont en ligne droite; donc les trois points A, B, C sont sur un cercle passant par O. Ensuite le point B′ est entre A′ et C′; donc le point B est dans l'angle AOC. Par conséquent, le quadrilatère OABC est *inscriptible* et *convexe*.

## VECTEURS ISOGONAUX

257. Définition. — On dit que deux couples de vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{a'}$, $\overline{b}$ et $\overline{b'}$ sont *isogonaux* lorsque l'angle $(\overline{a}, \overline{b})$ est égal à l'angle $(\overline{b'}, \overline{a'})$, et, par suite, l'angle $(\overline{a}, \overline{b'})$ égal à l'angle $(\overline{b}, \overline{a'})$; ou, ce qui revient au même, lorsque la bissectrice de l'angle formé par deux vecteurs issus d'un même point et respectivement équipollents à $\overline{a}$, $\overline{a'}$ est parallèle à la bissectrice de l'angle formé par deux vecteurs issus d'un même point et respectivement équipollents à $\overline{b}$, $\overline{b'}$.

Il en résulte immédiatement que deux couples de vecteurs isogonaux à un troisième sont isogonaux entre eux.

La relation d'*isogonalité* est pour les vecteurs ce que la relation d'*antiparallélisme* est pour les droites. D'ailleurs, si deux couples de vecteurs sont isogonaux, les deux couples de droites qui les portent sont antiparallèles; mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

258. Soient (fig. 229) A et A′, B et B′ deux couples de points

correspondants dans l'inversion de pôle O et de puissance λ ; les quatre points A, A′, B, B′ sont sur un même cercle. Le pôle O est extérieur ou intérieur à ce cercle selon que la puissance λ est positive ou négative ; mais, dans les deux cas, l'angle $(\overline{AO}, \overline{AB})$ est égal à l'angle $(\overline{B'A'}, \overline{B'O})$. Donc *les deux couples de vecteurs* $\overline{AO}$ *et* $\overline{B'O}$, $\overline{AB}$ *et* $\overline{B'A'}$, *sont isogonaux ;* par suite, *les deux couples* $\overline{AO}$ *et* $\overline{OB'}$, $\overline{AB}$ *et* $\overline{A'B'}$ *le sont aussi.*

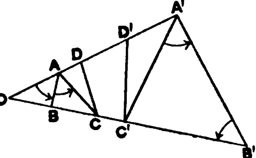


Fig. 229.

Considérons maintenant (fig. 230) quatre couples de points inverses : A et A′, B et B′, C et C′, D et D′. Les deux couples de vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$, $\overline{AO}$ et $\overline{OB'}$ étant isogonaux, ainsi que les deux couples $\overline{CD}$ et $\overline{C'D'}$ ; $\overline{CO}$ et $\overline{OD'}$, pour que les deux couples $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ et $\overline{C'D'}$ soient isogonaux, il faut et il suffit que les deux couples AO et OB′, $\overline{CO}$ et $\overline{OD'}$ le soient ; d'ailleurs on constate aisément, que si ces deux derniers couples sont isogonaux, il en est de même des deux couples $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$, et réciproquement. D'où ce théorème :

**Théorème.** — *Soient* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′, D *et* D′, *quatre couples de points inverses et* O *le pôle d'inversion ; pour que les deux couples de vecteurs* $\overline{AB}$ *et* $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ *et* $\overline{C'D'}$ *soient isogonaux, il faut et il suffit que les bissectrices des deux angles* AOB, COD *soient portées par la même droite.*

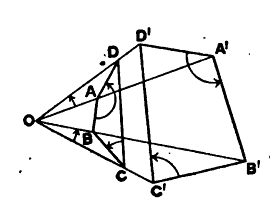


Fig. 230.

C'est ce qui arrive, par exemple, lorsque les angles AOB, COD coïncident (fig. 229), ou sont opposés par le sommet. Donc, dans ce cas,

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = (\overline{C'D'}, \overline{A'B'}).$$

Si les angles AOB, COD sont adjacents et supplémentaires, on a

$$(\overline{AB}, \overline{CD}) = (\overline{D'C'}, \overline{A'B'}).$$

En particulier, on peut supposer que D coïncide avec A et, par suite, D′ avec A′; il en résulte que

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{A'C'}, \overline{A'B'}),$$

dans le cas où le pôle O est sur le *prolongement* de la droite BC (fig. 229); tandis que

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = (\overline{C'A'}, \overline{A'B'}),$$

dans le cas où le pôle O est sur la *portion de droite* BC.

259. Revenons au cas général (fig. 230) et cherchons les relations qui existent entre les angles ou les côtés de deux quadrilatères ABCD, A′B′C′D′ dont les sommets sont inverses chacun à chacun. On a d'abord

$$(\overline{A'D'}, \overline{A'O}) = (\overline{OD}, \overline{AD}),$$
$$(\overline{A'O}, \overline{A'B'}) = (\overline{AB}, \overline{OB});$$

puis

$$(\overline{AB}, \overline{OB}) + (\overline{OB}, \overline{OD}) + (\overline{OD}, \overline{AD}) = (\overline{AB}, \overline{AD}) + 360\,k;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$(\overline{A'D'}, \overline{A'B'}) + (\overline{OB}, \overline{OD}) = (\overline{AB}, \overline{AD}) + 360\,k.$$

De même,

$$(\overline{C'B'}, \overline{C'D'}) + (\overline{OD}, \overline{OB}) = (\overline{CD}, \overline{CB}) + 360\,k.$$

Par conséquent,

$$(\overline{A'D'}, \overline{A'B'}) + (\overline{C'B'}, \overline{C'D'}) = (\overline{AB}, \overline{AD}) + (\overline{CD}, \overline{CB}) + 360\,k.$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$(\overline{AB}, \overline{AD}) + (\overline{A'B'}, \overline{A'D'}) = (\overline{CB}, \overline{CD}) + (\overline{C'B'}, \overline{C'D'}) + 360\,k.$$

D'autre part [241],

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{|\lambda|}{OA.OB},$$
$$\frac{C'D'}{CD} = \frac{|\lambda|}{OC.OD};$$

d'où

$$\frac{A'B'.C'D'}{AB.CD} = \frac{\lambda^2}{OA.OB.OC.OD}.$$

De même,

$$\frac{A'D'.B'C'}{AD.BC} = \frac{\lambda^2}{OA.OB.OC.OD}.$$

Par conséquent,

$$\frac{A'B'.C'D'}{A'D'.B'C'} = \frac{AB.CD}{AD.BC}.$$

Ainsi, *le rapport des produits des côtés opposés est le même dans les deux quadrilatères* (1).

### EXERCICES

1. Démontrer, en appliquant la théorie des transversales, que :

1° Les bissectrices des angles extérieurs d'un triangle rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite. De même, deux bissectrices intérieures et la bissectrice extérieure du troisième angle rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

2° Les tangentes au cercle circonscrit à un triangle menées par les trois sommets rencontrent les côtés opposés en trois points en ligne droite.

3° Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point du cercle circonscrit à un triangle sur les trois côtés sont en ligne droite (B. M. E. II, p. 39).

4° Les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des côtés opposés avec l'un des cercles inscrit ou exinscrits, sont concourantes.

5° Soient A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″ trois couples de points situés respectivement sur les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle et conjugués harmoniques par rapport à ces côtés ; si les trois

---

(1) Voir J. Petersen, *Théorie des équations algébriques*, p. 8, traduction H. Laurent, Paris, Gauthier-Villars.

points A′, B′, C′ sont en ligne droite, les trois droites AA″, BB″, CC″ sont concourantes, ainsi que les trois droites AA″, BB′, CC′, etc. ; et réciproquement. En déduire que, dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

6° Les milieux des trois diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

2. Démontrer le théorème fondamental sur le rapport anharmonique [222] en appliquant le théorème des transversales au quadrilatère ABB′A′ coupé par les transversales CC′ et DD′ (B. M. E. II).

3. Soient AB, AC deux tangentes à un cercle ; B, C leurs points de contact. On mène par le point B une sécante rencontrant le cercle en D et la tangente AC en E ; démontrer que, lorsque cette sécante tourne autour du point B, le rapport $\frac{BD.BE}{AE}$ reste constant. En déduire, en imitant la démonstration du théorème de Pascal [216], que, dans un quadrilatère inscrit, les tangentes en deux sommets opposés se coupent sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés.

4. Quand deux faisceaux O.ABCD, O′.AB′C′D′ ont un rayon commun OO′A et même rapport anharmonique, les points d'intersection des rayons correspondants, OB et O′B′, OC et O′C′, OD et O′D′, sont en ligne droite.

5. Si deux systèmes de quatre points ABCD, AB′C′D′, situés respectivement sur deux droites différentes, ont un point commun A et même rapport anharmonique, les droites BB′, CC′, DD′ qui joignent les points correspondants sont concourantes.

6. Soient A, B, C, trois points d'une droite ; A′, B′, C′, trois points d'une autre droite ; démontrer que les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone AB′CA′BC′A sont en ligne droite.

7. On mène par un point A deux droites ABB′, ACC′, qui rencontrent un cercle de centre O, l'une en B et B′, l'autre en C et C′. Démontrer que le second point d'intersection des cercles ABC, AB′C′ est situé sur le cercle de diamètre AO. En déduire que le point de rencontre des droites BC, B′C′ est situé sur l'axe radical du cercle O et du cercle de diamètre AO, par suite, sur la polaire de A.

8. Mener par un point A un cercle tangent à deux cercles donnés O et O′.

— Soit Γ le cercle cherché, que nous supposerons, par exemple, tangent extérieurement aux deux cercles O et O′ en B et B′. Les points de contact B et B′ sont les centres d'homothétie inverse du

cercle Γ avec les cercles O et O′, donc la droite BB′ passe [169] par le centre S d'homothétie directe des cercles O et O′ et les points B et B′ sont deux points antihomologues de ces deux cercles. Si l'on construit deux autres points antihomologues C, C′ et si l'on appelle A′ le second point de rencontre du cercle Γ avec SA, on a :

$$\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SB'} = \overline{SC}.\overline{SC'},$$

ce qui permet de construire le point A′. On est donc ramené à construire [211] un cercle passant par deux points A et A′ et tangent à l'un des cercles donnés, O, par exemple. Le cercle obtenu sera tangent à l'autre cercle O′ ; car, si l'on transforme la figure par inversion, en prenant pour pôle le point S et pour puissance $\overline{SC} \times \overline{SC'}$, la figure inverse du cercle O est le cercle O′, et le cercle trouvé se transforme en lui-même ; donc, puisqu'il est tangent au cercle O, il l'est aussi au cercle O′.

9. Mener par un point A un cercle tangent à un cercle donné O et à une droite donnée Δ.

— Soient B, B′ les points de contact du cercle cherché Γ avec la droite Δ et le cercle O et soit ω le centre de Γ. On commence par démontrer en considérant les triangles isoscèles OB′S, ωBB′, que le second point de rencontre S de la droite BB′ avec le cercle O est l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à Δ. Soit S′ l'autre extrémité et soit D le point d'intersection de ce diamètre avec la droite Δ ; enfin, soit A′ le second point de rencontre de la droite SA avec le cercle Γ. Les droites B′S′, BD étant antiparallèles par rapport aux droites SB et SD, on a

$$\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{SB}.\overline{SB'} = \overline{SS'}.\overline{SD} ;$$

ce qui permet de construire le point A′. On est donc ramené à construire un cercle passant par deux points A et A′ et tangent à la droite Δ, par exemple [210].

Le cercle obtenu sera aussi tangent au cercle O ; on le démontre, comme ci-dessus, en transformant la figure par inversion, en prenant S pour pôle et $\overline{SS'} \times \overline{SD}$ pour puissance d'inversion.

10. On considère (fig. 231) un losange articulé ABCD, dont deux sommets opposés B et D sont reliés à un point fixe O par deux tiges OB et OD de même longueur ; démontrer que, quand le système se déforme, les points O, A, C sont toujours en ligne droite et que $\overline{OA} \times \overline{OC}$ reste constant.

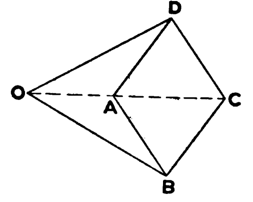


Fig. 231.

— En effet, les points A et C sont sur un cercle de centre D et $\overline{OA} \times \overline{OC}$, qui représente la puissance du point O par rapport à ce cercle, est égal à $\overline{OD}^2 - \overline{DA}^2$.

Il en résulte que, si l'on fait décrire un cercle à l'un des points A ou C, l'autre décrira, en général, un autre cercle. En particulier, si le point C décrit une droite, le point A décrira un cercle passant par O.

Cet appareil, appelé l'*inverseur Paucellier*, réalise la transformation du mouvement rectiligne en mouvement circulaire, et réciproquement. Mais il est essentiel de remarquer que, le point C ne pouvant décrire qu'une portion de droite, le point A ne décrira qu'un arc de cercle.

11. Par deux points fixes A et B, on mène deux droites AC et BD faisant un angle donné $\alpha$ et telles que le produit AC $\times$ BD soit égal à une puissance donnée $\lambda$ ; démontrer que, si le point C décrit un cercle, le point D décrit un autre cercle.

12. On considère une droite BC de longueur constante dont les extrémités décrivent deux circonférences de centres A et D. Sur la perpendiculaire à AC menée par le point B, on prend un point M tel que le produit AC $\times$ DM soit égal à une puissance donnée $\lambda$. Démontrer que le lieu du point M est un cercle, et construire le centre de ce cercle.

— On commencera par démontrer que, en abaissant BB′, DD′ perpendiculaires sur AC, le produit AC $\times$ B′D′ reste constant, et on en déduira que l'angle de DM avec AC est aussi constant.

13. Les trois cercles tangents extérieurement à deux des cercles exinscrits à un triangle et intérieurement au troisième passent par un même point (*Steiner*).

— On transforme la figure par inversion en prenant pour pôle le centre radical des trois cercles exinscrits et pour puissance d'inversion la puissance de ce centre radical par rapport à chacun de ces trois cercles : les cercles de l'énoncé sont les inverses des trois côtés du triangle.

Quel est le centre radical des cercles exinscrits, et quels sont les deux autres cercles tangents aux trois cercles exinscrits ?

On peut d'ailleurs remplacer l'un des trois cercles exinscrits par le cercle inscrit.

14. Si l'on transforme par inversion un système de deux cercles et que l'on désigne par $d$, $r$, $\rho$ la distance des centres et les rayons des deux cercles primitifs, par $d'$, $r'$, $\rho'$ la distance des centres et les rayons des deux cercles transformés, on a

$$\frac{d^2 - r^2 - \rho^2}{r\rho} = \varepsilon\,\frac{d'^2 - r'^2 - \rho'^2}{r'\rho'},$$

en faisant $\varepsilon = +1$ dans le cas où le pôle d'inversion est à la fois extérieur ou intérieur aux deux cercles donnés, et $\varepsilon = -1$ dans le cas contraire.

— En effet soient C, Γ les centres des deux cercles primitifs ; C′, Γ′ ceux des cercles transformés ; D, D′ les projections de Γ, Γ′ sur la droite CC′ ; O le pôle et λ la puissance d'inversion ; $c, c', \gamma, \gamma$ les puissances du pôle par rapport aux cercles C, C′, Γ, Γ′. On a

$$d^2 = \overline{OC}^2 + \overline{O\Gamma}^2 - 2\overline{OC}.\overline{OD};$$

d'où

$$d^2 - r^2 - \rho^2 = c + \gamma - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}.$$

Ensuite,

$$d'^2 - r'^2 - \rho'^2 = c' + \gamma' - 2\overline{OC'}.\ \overline{OD'};$$

$$c' = \frac{\lambda^2}{c}, \qquad \gamma' = \frac{\lambda^2}{\gamma};$$

$$\overline{OC'} = \overline{OC}.\ \frac{\lambda}{c}, \qquad \overline{OD'} = \overline{OD}.\ \frac{\lambda}{\gamma};$$

$$\frac{r'}{r} = \left|\frac{\lambda}{c}\right|, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \left|\frac{\lambda}{\gamma}\right|, \qquad \text{d'où } \frac{r'\rho'}{r\rho} = \varepsilon\frac{\lambda^2}{c\gamma},$$

$\varepsilon$ ayant le signe de $c\gamma$.

On en déduit aisément la relation annoncée.

*Cas particulier*. — Si l'inverse du cercle C est une droite, en désignant par $\delta'$ la distance de cette droite au centre Γ′ de l'inverse du cercle Γ, on a

$$\left|\frac{d^2 - r^2 - \rho^2}{2r\rho}\right| = \frac{\delta'}{\rho'}.$$

15. Si l'on considère deux cercles comme des figures inverses, l'inverse du centre de l'un est sur la polaire du pôle d'inversion par rapport à l'autre.

En déduire que l'on peut transformer deux cercles qui ne se coupent pas en deux cercles concentriques, en prenant pour pôle d'inversion l'un des points limites de la famille à laquelle appartiennent les deux cercles donnés.

16. Le cercle des neuf points d'un triangle ABC est tangent aux cercles inscrit et exinscrit. — Ce théorème est dû à Feuerbach ; pour le démontrer, il suffit de transformer la figure par inversion en prenant pour pôle le milieu de BC et pour puissance la puissance de ce point par rapport au cercle inscrit ; le cercle inscrit et

le cercle exinscrit dans l'angle A ne changent pas, l'inverse du cercle des neuf points est la seconde tangente commune intérieure aux deux cercles précédents [ex. 15, p. 207], etc. — Soit H l'orthocentre du triangle ABC ; les quatre triangles ABC, HBC, HCA, HAB ont même cercle des neuf points ; ce cercle est donc tangent aux seize cercles inscrits et exinscrits à ces quatre triangles. (Voir *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, p. 292.)

---

## CHAPITRE VII

## POLYGONES RÉGULIERS

260. On dit qu'une ligne brisée est *régulière* lorsque tous les côtés et tous les angles de cette ligne sont égaux et que deux angles consécutifs quelconques sont situés dans la même région du plan par rapport au côté commun. Ainsi (fig. 232) la ligne brisée ABCDE est régulière ; mais la ligne FGHI ne l'est pas, quoiqu'elle ait tous ses côtés et tous ses angles égaux, parce que les angles FGH et GHI sont situés de part et d'autre du côté commun GH.

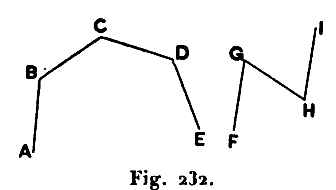


Fig. 232.

On appelle *polygone régulier* une ligne brisée régulière fermée.

261. Il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés. En effet, supposons (fig. 233) une circonférence divisée en $n$ parties égales et joignons les points de division consécutifs. Le polygone ABCDEF ainsi obtenu est régulier ; car tous ses côtés sont égaux comme cordes sous-tendant des arcs égaux, et tous ses

angles sont égaux comme ayant même mesure. Nous obtenons ainsi un polygone régulier *convexe*.

Plus généralement, parcourons la circonférence dans

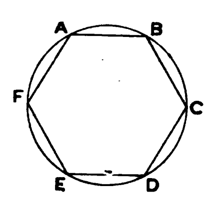



Fig. 233.

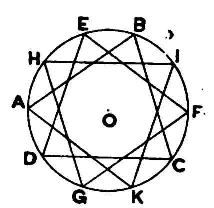



Fig. 234.

un sens déterminé et joignons les points de division de $k$ en $k$ (fig. 234). Nous obtenons ainsi une ligne brisée régulière ABCD..., qui se fermera lorsque le nombre des divisions parcourues sera égal au plus petit multiple commun de $n$ et de $k$; mais on a vu en arithmétique [1] que ce plus petit multiple commun est $\frac{nk}{d}$, $d$ étant le plus grand commun diviseur de $n$ et de $k$. Ainsi, la ligne brisée ABCD... se fermera quand on aura parcouru $\frac{nk}{d}$ divisions, c'est-à-dire quand on aura tracé $\frac{n}{d}$ côtés, puisque chaque côté sous-tend $k$ divisions; on obtiendra donc un polygone régulier de $\frac{n}{d}$ côtés. Par conséquent, pour que le nombre des côtés de ce polygone soit précisément égal à $n$, il faut et il suffit que $d = 1$, c'est-à-dire que $n$ et $k$ soient premiers entre eux.

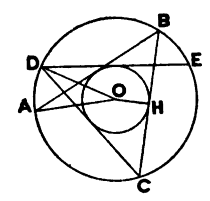
Reste à prouver que les polygones réguliers obtenus en partageant une circonférence en parties égales sont les seuls qui existent; c'est ce qui résulte du théorème suivant

---

[1] Voir *Manuel d'arithmétique* de L. GÉRARD, p. 39.

262. ***Théorème.*** — *Etant donnée une ligne brisée régulière* ABCDE (fig. 235), *on peut lui inscrire et lui circonscrire une circonférence.*

1° Par les trois sommets A, B, C faisons passer un



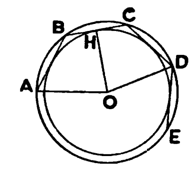




Fig. 235.

cercle et soit O le centre de ce cercle. Abaissons OH perpendiculaire sur BC; le pied H de cette perpendiculaire sera le milieu de BC. Donc, si nous plions la figure autour de OH, HB viendra s'appliquer sur HC et le point B tombera en C. Mais, par hypothèse, les angles B et C sont égaux et *situés d'un même côté de* BC, donc BA prendra la direction de CD et, comme BA = CD, le point A viendra coïncider avec le point D; le point O n'ayant pas bougé, on en conclut que OD = OA. Donc la circonférence de centre O et de rayon OA passera par D, et on démontrerait de même qu'elle passe par les autres sommets.

*Autrement.* Faisons tourner la figure autour du point O de l'angle AOB ou BOC. La droite AB viendra s'appliquer sur BC, et l'angle ABC sur l'angle BCD ; comme BC = CD, le point C viendra coïncider avec le point D. On en conclut que OD = OC, etc.

2° Les côtés AB, BC, CD,... étant des cordes égales de la circonférence (OA) sont à égale distance du centre; si donc on décrit, de O comme centre, un cercle de rayon égal à la distance commune OH de ces cordes au

point O, ce cercle sera tangent à tous les côtés de la ligne brisée ABCDE.

Cette démonstration s'applique évidemment à un polygone régulier.

263. On dit qu'un polygone régulier P est *de $k^e$ espèce* lorsque la somme des arcs moindres qu'une demi-circonférence sous-tendus par ses côtés est égale à $k$ circonférences ; si $n$ est le nombre des côtés, chacun de ces arcs est égal à

$$\frac{360^0 \times k}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{360^0}{n} \times k;$$

ce qui montre que le polygone P peut s'obtenir en partageant la circonférence circonscrite en $n$ parties égales et en joignant les points de division de $k$ en $k$.

Ce nombre $k$ qui représente l'espèce du polygone P est nécessairement premier à $n$, sans quoi [261] le polygone P aurait moins de $n$ côtés, et moindre que $\frac{n}{2}$ puisque, par hypothèse,

$$\frac{360^0 \times k}{n} < \frac{360^0}{2}.$$

*Réciproquement,* si $n$ et $k$ sont deux nombres entiers tels que $k$ soit premier à $n$ et inférieur à $\frac{n}{2}$, il existe des polygones réguliers de $n$ côtés et de $k^e$ espèce. En effet, si l'on partage une circonférence quelconque en $n$ parties égales et que l'on joigne les points de division de $k$ en $k$, on obtiendra [261] un polygone régulier de $n$ côtés, et ce polygone sera de $k^e$ espèce ; car, en appelant $\alpha$ l'arc moindre qu'une demi-circonférence sous-tendu par l'un de ses côtés, on a

$$\alpha = \frac{360^0}{n} \times k, \qquad \text{d'où} \qquad n\alpha = 360^0 \times k.$$

D'où ce théorème :

**Théorème.** — *Il y a autant d'espèces de polygones réguliers de n côtés que de nombres entiers premiers à n et inférieurs à* $\frac{n}{2}$.

Les polygones réguliers de *première* espèce sont *convexes ;* les autres sont appelés *étoilés.*

264. Le centre commun des cercles inscrit et circonscrit à une ligne brisée régulière, ou à un polygone régulier, s'appelle le *centre* de cette ligne brisée, ou de ce polygone, bien qu'en réalité une ligne brisée ouverte et un polygone d'un nombre impair de côtés n'aient pas de centre.

On appelle *rayon* d'une ligne brisée régulière, ou d'un polygone régulier, le rayon du cercle circonscrit ; *apothème*, le rayon du cercle inscrit ; *angle au centre,* l'angle AOB (fig. 238) formé par deux rayons aboutissant à deux sommets consécutifs.

L'angle au centre d'un polygone régulier de $n$ côtés et de $k^e$ espèce est égal à $\frac{360^\circ \times k}{n}$.

265. **Théorème.** — *Si l'on partage une circonférence en n parties égales, en menant les tangentes par les points de division* A, B, C,... (fig. 236), *on obtient un polygone régulier circonscrit convexe* GHK ..., *dont les sommets sont les points d'intersection des tangentes en deux points de division consécutifs.*

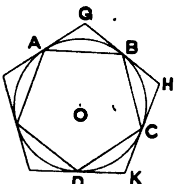


Fig. 236.

En effet, les angles GAB, GBA, HBC, ... sont égaux comme ayant même mesure ; donc les triangles GAB, HBC, ... sont isoscèles et égaux

comme ayant un côté égal, AB = BC = ..., adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Par conséquent, les angles G, H, K, ... sont égaux et tous les segments AG, BG, BH, ... sont égaux. Donc les côtés du polygone GHK..., qui se composent chacun de deux de ces segments, sont égaux et ce polygone est régulier.

Remarque. — Au lieu de mener les tangentes par les points de division, il revient au même de les mener par les milieux des arcs AB, BC,...; on obtient ainsi (fig. 237) un polygone circonscrit homothétique au polygone inscrit.

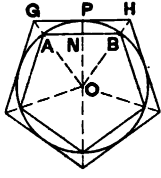


Fig. 237.

266. Problème. — *Connaissant le côté et le rayon d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés.*

Soient (fig. 237) AB $= a$, OA $= r$ le côté et le rayon du polygone inscrit; GH $= b$ le côté du polygone circonscrit. Abaissons ONP perpendiculaire sur AB et sur GH. On a

$$\frac{GH}{AB} = \frac{OG}{OA} = \frac{OP}{ON}, \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{r}{ON}.$$

Mais, dans le triangle rectangle ONA, on a

$$ON = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Donc

$$b = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}. \qquad (1)$$

*Réciproquement*, étant donnés $b$ et $r$, on calcule $a$ au moyen de la relation

$$\frac{AB}{GH} = \frac{OA}{OG}, \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{b^2}{4}}},$$

d'où

$$a = \frac{2br}{\sqrt{4r^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

D'ailleurs, on aurait pu trouver cette dernière formule en résolvant l'équation (1) par rapport à $a$.

267. ***Théorème***. — *Deux polygones réguliers* ABC..., A′B′C′... (fig. 238) *de même espèce et d'un même nombre de côtés sont semblables et le rapport de leurs périmètres est égal au rapport de leurs rayons, ou de leurs apothèmes.*

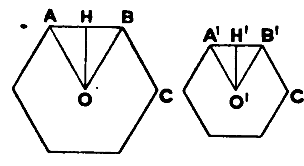


Fig. 238.

En effet, ces deux polygones ayant même angle au centre [264], si on les porte l'un sur l'autre de manière que le centre O et le rayon OA du premier s'appliquent sur le centre O′ et le rayon O′A′ du second, le point A tombera sur O′A′, le point B sur O′B′,... et comme $\frac{O'A'}{OA} = \frac{O'B'}{OB} = \ldots$, les deux polygones deviendront homothétiques; donc ils étaient semblables.

D'autre part, soient P et P′ les périmètres de ces deux polygones, $n$ le nombre de leurs côtés, OH et O′H′ leurs apothèmes; on a, dans les triangles semblables OAB et O′A′B′, OAH et O′A′H′,

$$\frac{P'}{P} = \frac{n\,A'B'}{n\,AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{O'H'}{OH}.$$

268. Problème. — *Inscrire un carré à un cercle.*

On mène (fig. 239) deux diamètres rectangulaires AC et BD, qui partagent la circonférence en quatre quadrants : ABCD est le carré demandé.

Soit $r$ le rayon du cercle ; dans le triangle rectangle AOB, on a

$$AB = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

L'apothème OH est la moitié du côté ; car, dans le triangle ABC, la droite OH, qui joint les milieux de deux côtés, est égale à la moitié du troisième côté BC.

Fig. 239.

269. Problème. — *Inscrire à un cercle un hexagone régulier et un triangle équilatéral.*

1° Soit AB (fig. 240) le côté de l'hexagone régulier inscrit au cercle (OA). L'angle au centre AOB vaut $\frac{360°}{6} = 60°$ ; donc la somme des angles à la base du triangle isoscèle AOB est égale à $180° - 60° = 120°$; donc chacun d'eux vaut 60° et, par suite, le triangle AOB est équilatéral.

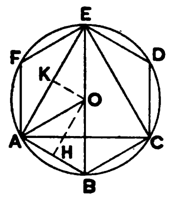


Fig. 240.

Donc le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon et, pour construire cet hexagone, il suffit de tracer six cordes consécutives égales au rayon.

2° En joignant les sommets de l'hexagone de deux en deux, on obtient le triangle équilatéral ACE.

Pour calculer le côté AE de ce triangle, on considère le triangle rectangle AEB dans lequel

$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$

d'où
$$AE = r\sqrt{3}.$$

270. L'apothème OH de l'hexagone régulier est la moitié du côté du triangle équilatéral; car cet apothème joint les milieux de deux côtés du triangle ABE. Donc

$$OH = \frac{AE}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

De même, l'apothème OK du triangle équilatéral est la moitié du côté AB de l'hexagone, c'est-à-dire la moitié du rayon.

271. Quand deux cordes sont *supplémentaires*, c'est-à-dire sous-tendent des arcs supplémentaires, si l'une d'elles est le côté d'un polygone régulier, il en est de même de l'autre.

En effet, l'un des arcs étant la fraction $\frac{k}{n}$ de la circonférence, l'arc supplémentaire vaudra $\frac{1}{2} - \frac{k}{n}$, ou $\frac{n - 2k}{2n}$ de la circonférence. Par exemple,

$$\text{si } \frac{k}{n} = \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{2} - \frac{k}{n} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}.$$

Dans ce cas, l'apothème de l'un des polygones est la moitié du côté de l'autre.

Ainsi, nous avons vu que l'apothème du triangle équilatéral est la moitié du côté de l'hexagone inscrit au même cercle, et inversement. De même, l'apothème du pentagone convexe est la moitié du côté du décagone étoilé, etc.

D'ailleurs, pour calculer directement l'apothème OH (fig. 240) d'un polygone régulier dont on connaît le côté AB $= a$ et le rayon OA $= r$, il suffit de remarquer que le triangle rectangle OAII donne

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 = r^2 - \frac{a^2}{4}.$$

272. **Problème.** — *Inscrire à un cercle un décagone régulier et un pentagone régulier.*

Il y a deux nombres entiers premiers à 10 et inférieurs à $\frac{10}{2}$, savoir 1 et 3; de même, il y a deux nombres entiers premiers à 5 et inférieurs à $\frac{5}{2}$, savoir 1 et 2. Donc on peut inscrire à un cercle deux décagones réguliers et deux pentagones réguliers, dont les côtés sous-tendent des arcs respectivement égaux à $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ de la circonférence. Comme $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ et $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, pour obtenir ces quatre polygones, il suffira de partager la circonférence en 10 parties égales et de joindre les points de division de 1 en 1, de 3 en 3, de 2 en 2 et de 4 en 4.

1° Soient AB, AC les côtés des deux décagones (fig. 241); nous allons montrer que leur différence et leur moyenne proportionnelle sont égales au rayon. En effet, traçons OA, OB, OC et soit D le point de rencontre de OB avec AC. Les triangles ABD, ODC sont isoscèles, car les angles ABD, ADB, CDO, DOC sont égaux, comme ayant chacun pour mesure deux dixièmes de la circonférence. Donc AB = AD et DC = OC; par suite

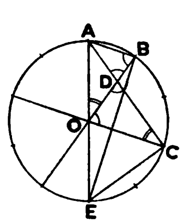


Fig. 241.

$$AC - AB = AC - AD = DC = OC = r.$$

Ensuite, les angles AOD, OCA sont égaux, comme ayant chacun pour mesure un dixième de la circonférence; par conséquent, OD et OC sont antiparallèles par rapport aux droites AC et AO. Donc

$$AC \times AD = \overline{AO}^2 ;$$

mais AD = AB ; donc

$$AC \times AB = \overline{AO}^2.$$

On est donc ramené à construire deux longueurs AB et AC dont la différence et la moyenne proportionnelle soient égales au rayon ; ce qui revient [208] à partager le rayon en moyenne et extrême raison. D'où la construction suivante :

Menez (fig. 242) deux rayons rectangulaires OA et OB ; du milieu C de OB comme centre, avec CA pour rayon, décrivez un cercle, qui coupe la droite OB en deux points F et G : OF et OG sont les deux longueurs cherchées. D'ailleurs on peut le vérifier en remarquant que leur moyenne proportionnelle est OA et que leur différence est OB.

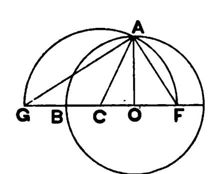


Fig. 242.

Pour calculer ces deux longueurs, il n'y a qu'à répéter le calcul déjà fait au n° 208; on trouve, pour le côté du décagone régulier convexe,

$$OF = CA - CO = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

et, pour le côté du décagone régulier étoilé,

$$OG = CA + CO = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

2° La circonférence étant divisée en 10 parties égales, si l'on joint les points de division de 2 en 2, ou de 4 en 4 (fig. 241), on obtient le pentagone régulier convexe et le pentagone régulier étoilé. On calcule les côtés EC, EB de ces deux polygones dans les deux triangles rectangles AEC, AEB :

$$\overline{EC}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AC}^2, \qquad \overline{EB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AB}^2;$$

d'où, en remplaçant AE par $2r$, AC par $\frac{r}{2}(\sqrt{5}+1)$, AB par $\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$,

$$EC=\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}(6+2\sqrt{5})}=\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$EB=\sqrt{4r^2-\frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})}=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Ces formules peuvent s'écrire

$$\overline{EC}^2=r^2+\frac{r^2}{4}(6-2\sqrt{5})=r^2+\overline{OF}^2 \text{ (fig. 242)},$$

$$\overline{EB}^2=r^2+\frac{r^2}{4}(6+2\sqrt{5})=r^2+\overline{OG}^2;$$

c'est-à-dire que les côtés EC, EB des deux pentagones sont égaux aux droites AF et AG de la figure 242; ce sont les hypoténuses de deux triangles rectangles ayant

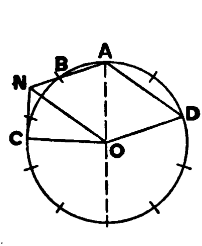



Fig. 243.

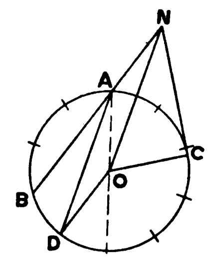



Fig. 244.

pour côtés de l'angle droit : 1° le rayon du cercle; 2° le côté du décagone régulier convexe ou étoilé.

*Démonstration géométrique.* — Soit (fig. 243) AB le côté du décagone régulier convexe inscrit au cercle O ; menons le rayon OD parallèle à AB ; AD est le côté du pentagone régulier convexe. Achevons le parallélogramme ADON, en menant ON parallèle à AD; puis

menons la tangente NC. Dans le triangle rectangle OCN, l'hypoténuse ON est égale au côté AD du pentagone, le côté OC est égal au rayon ; reste à prouver que NC = AB. En effet, on a

$$\overline{NC}^2 = NA.NB;$$

mais la droite AN, qui est égale au rayon, est divisée par le point B en moyenne et extrême raison ; donc

$$\overline{AB}^2 = NA.NB, \qquad \text{d'où} \quad NC = AB.$$

Le raisonnement s'applique mot pour mot au décagone et au pentagone étoilés (fig. 244).

273. Problème. — *Inscrire à un cercle un pentédécagone régulier.*

Il y a quatre nombres entiers premiers à 15 et inférieurs à $\frac{15}{2}$, savoir 1, 2, 4, 7; donc on peut inscrire au cercle donné quatre pentédécagones réguliers dont les côtés sous-tendent des arcs respectivement égaux à $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15}$ de la circonférence.
Or

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10},$$

$$\frac{2}{15} = \frac{2}{6} - \frac{2}{10} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5},$$

$$\frac{4}{15} = \frac{4}{6} - \frac{4}{10} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5},$$

$$\frac{7}{15} = \frac{7}{6} - \frac{7}{10} = \frac{1}{6} + \frac{3}{10}.$$

On en déduit le moyen de construire les quatre pentédécagones et de calculer leurs côtés.

1° Si de l'arc AB (fig. 245) sous-tendu par le côté de l'hexagone on retranche l'arc AC sous-tendu par le côté du décagone convexe, l'arc restant BC sera égal à $\frac{1}{15}$ de la circonférence et la corde BC sera le côté du premier pentédécagone. Menons le diamètre AD; on a, dans le quadrilatère ACBD,

$$BC \times AD + AC \times BD = AB \times CD. \qquad (1)$$

Or

$$AD = 2r, \quad AB = r, \quad AC = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

De plus, les arcs BD et CD étant respectivement le $\frac{1}{3}$ et les $\frac{2}{5}$ de la circonférence, les cordes BD et CD

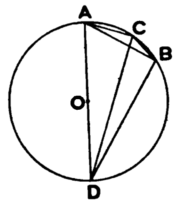


Fig. 245.

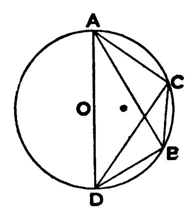


Fig. 246.

sont respectivement les côtés du triangle équilatéral et du pentagone régulier étoilé inscrits.

Donc

$$BD = r\sqrt{3}, \qquad CD = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

D'où, en portant dans (1),

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right).$$

2° Si de l'arc AB (fig. 246) sous-tendu par le côté du triangle équilatéral nous retranchons l'arc AC sous-tendu par le côté du pentagone convexe, l'arc restant BC sera les $\frac{2}{15}$ de la circonférence et la corde BC

sera le côté du deuxième pentédécagone. En menant le diamètre AD, on trouve comme ci-dessus,

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

3° Si du plus grand arc sous-tendu par le côté AB du triangle équilatéral (fig. 247) on retranche l'arc AC sous-tendu par le côté du pentagone étoilé, l'arc restant BC sera les $\frac{4}{15}$ de la circonférence et la corde BC sera le côté du troisième pentédécagone. Menons le diamètre AD; on a, dans le quadrilatère ACDB,

$$BC \times AD = AB \times CD + AC \times BD.$$

Mais

$$AD = 2r, \quad AB = r\sqrt{3}, \quad AC = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$
$$BD = r, \quad CD = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

D'où

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right).$$

4° Si à l'arc AB (fig. 248) sous-tendu par le côté de

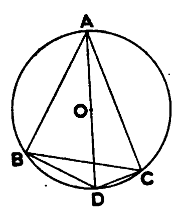


Fig. 247.

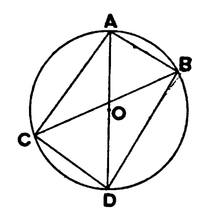


Fig. 248.

l'hexagone on ajoute l'arc AC sous-tendu par le côté du décagone étoilé, l'arc total BC est les $\frac{7}{15}$ de la circonférence et la corde BC est le côté du quatrième pentédé-

cagone; en le calculant comme le précédent, on trouve

$$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

274. **Remarque.** — Comme on peut diviser un arc en deux parties égales, on peut, d'après ce qui précède, inscrire à un cercle, au moyen de la règle et du compas, les polygones réguliers de

| | |
|---|---|
| 4, 8, 16, 32 . . | $2^n$ côtés, |
| 3, 6, 12, 24. . . | $3 \times 2^n$ côtés, |
| 5, 10, 20, 40. . . | $5 \times 2^n$ côtés, |
| 15, 30, 60, 120 . . | $3 \times 5 \times 2^n$ côtés. |

275. **Problème.** — *Étant donnés le rayon r d'un cercle et le côté* AB $= a$ (fig. 249) *d'un polygone régulier inscrit, calculer le côté du polygone régulier inscrit d'un nombre double de côtés.*

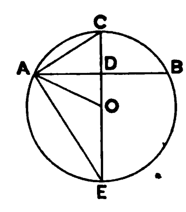


Fig. 249.

Menons le diamètre COE perpendiculaire à AB, qui passe par le milieu D de la corde AB et par le milieu C de l'arc AB; AC est le côté du polygone cherché. Appelons-le $b$; on a, dans le triangle acutangle OAC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,OC \times OD,$$

ou

$$b^2 = 2r^2 - 2r \times OD.$$

Mais $OD = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$, donc

$$b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

*Réciproquement*, connaissant $b$, on peut calculer $a$. En effet, les triangles rectangles DAC et AEC sont semblables; donc

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{EC};$$

d'où

$$AD \times EC = AC \times AE \quad \text{ou} \quad \frac{a}{2} 2r = b\sqrt{4r^2 - b^2},$$

$$a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}.$$

276. Problème. — *Connaissant les périmètres $p$ et $P$ de deux polygones réguliers de $n$ côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, calculer les périmètres $p'$ et $P'$ de deux polygones réguliers de $2n$ côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

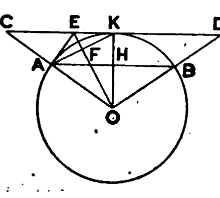


Fig. 250.

Soient (fig. 250) AB et CD les côtés des deux polygones donnés, de périmètres $p$ et $P$; K le point de contact de CD; E le point de rencontre de CD avec la tangente en A; F celui de AK avec OE; H celui de OK avec AB. On a

$$p = 2n\,AH, \qquad P = 2n\,CK,$$
$$p' = 2n\,AK = 4n\,FK, \qquad P' = 4n\,EK.$$

La droite OE étant bissectrice dans le triangle COK, on a

$$\frac{EK}{EC} = \frac{OK}{OC} = \frac{OA}{OC} = \frac{p}{P};$$

d'où

$$\frac{p}{P+p} = \frac{EK}{EC+EK} = \frac{4nEK}{4nCK} = \frac{P'}{2P};$$

donc

$$P' = \frac{2Pp}{P+p}. \qquad (1)$$

Pour calculer $p'$, remarquons que les triangles AHK, KFE sont semblables comme équiangles, donc

$$\frac{AH}{AK} = \frac{KF}{KE}, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{p'} = \frac{p'}{P'};$$

d'où

$$p' = \sqrt{P'p}. \qquad (2)$$

277. **Remarque.** — On peut déduire des formules (1) et (2) que

$$P' - p' < \frac{1}{4}(P - p).$$

En effet,

$$P' - p' = \frac{P'^2 - p'^2}{P' + p'} = \frac{P'}{P' + p'}(P' - p).$$

D'autre part, de la formule (1), on déduit que

$$P' - p = \frac{p}{P + p}(P - p).$$

Donc

$$P' - p' = \frac{P'}{P + p} \times \frac{p}{P' + p'}(P - p)$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{4Pp}{(P + p)^2} \times \frac{2p}{P' + p'}(P - p).$$

Comme $4Pp < (P + p)^2$ et $2p < P' + p'$, il en résulte que $P' - p'$ est moindre que le quart de $P - p$.

278. **Problème.** — *Étant donnés le rayon r et l'apothème a d'un polygone régulier, calculer le rayon r' et l'apothème a' du polygone régulier* isopérimètre [1] *d'un nombre double de côtés.*

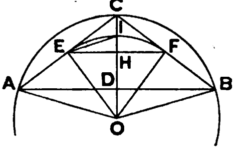


Fig. 251.

Soient (fig. 251) AB le côté du polygone donné, $OA = r$ et $OD = a$ son rayon et son apothème. La droite OD prolongée passe par le milieu C de l'arc AB;

[1] C'est-à-dire ayant même périmètre que le premier.

menons les cordes CA, CB et soient E, F leurs milieux. On a

$$EF = \frac{1}{2} AB, \qquad \widehat{EOF} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

Donc EF est le côté et l'angle EOF est l'angle au centre du polygone demandé ; son rayon est OE et son apothème OH, en appelant H le point de rencontre de CO avec EF. Or ce point H est le milieu de CD, donc

$$OH = OD + \frac{OC - OD}{2} = \frac{OD + OC}{2},$$

ou

$$a' = \frac{a + r}{2}. \qquad (1)$$

Puis, dans le triangle rectangle OEC, $OE = \sqrt{OC \times OH}$ ; donc

$$r' = \sqrt{ra'}. \qquad (2)$$

279. Remarque. — On voit sur la figure que OH > OD et OE < OC ; donc

$$a' > a \quad \text{et} \quad r' < r.$$

Pour trouver une limite supérieure de $r' - a'$, décrivons de O comme centre, avec OE pour rayon, un arc de cercle EIF, qui coupe CH au point I :

$$r' - a' = HI.$$

Mais EI est la bissectrice de l'angle CEH, puisque I est le milieu de l'arc EF ; donc

$$\frac{HI}{IC} = \frac{EH}{EC}.$$



Comme EH < EC, il en résulte que HI < IC, ou $HI < \frac{1}{2} HC$, ou enfin $HI < \frac{1}{4} CD$, c'est-à-dire

$$r' - a' < \frac{1}{4}(r - a).$$

On aurait pu déduire cette relation des formules (1) et (2) en raisonnant comme au n° 277.

EXERCICES

1. Si les angles d'un polygone circonscrit à un cercle sont égaux, ce polygone est régulier.

En est-il de même si les côtés sont égaux ?

2. L'angle intérieur d'un polygone régulier de $n$ côtés et d'espèce $k$ a pour mesure $2 - \frac{4k}{n}$ et l'angle extérieur a pour mesure $\frac{4k}{n}$, en prenant pour unité l'angle droit.

3. Le côté du triangle équilatéral circonscrit à un cercle est double de celui du triangle équilatéral inscrit.

4. Le côté du carré circonscrit à un cercle est égal au diamètre.

5. Le côté de l'hexagone régulier circonscrit à un cercle de rayon $r$ est égal à $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. — En effet, le rapport de son apothème à celui de l'hexagone régulier inscrit est $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

6. Calculer les côtés des pentagones et des décagones réguliers circonscrits à un cercle de rayon $n$.

7. Combien y a-t-il d'espèces d'octogones et de dodécagones réguliers ? Calculer leur côté et leur apothème en fonction du rayon.

8. Appliquer la formule du n° 275 au calcul du côté du pentagone régulier inscrit, en supposant connu le côté du décagone.

9. Les diagonales d'un pentagone régulier se partagent mutuellement en moyenne et extrême raison.

10. Les côtés d'un pentagone régulier étoilé déterminent, par leurs intersections mutuelles, un pentagone régulier convexe; calculer le côté de ce second pentagone en fonction de celui du premier. Même question pour le décagone.

11. Connaissant l'apothème et le côté d'un polygone régulier circonscrit à un cercle, calculer le côté du polygone régulier circonscrit au même cercle et d'un nombre double de côtés.

12. Quels sont les polygones réguliers qui, *employés seuls*, puissent servir à former un parquet ?

Il s'agit d'assembler autour d'un point $y$ polygones réguliers convexes égaux de $x$ côtés, de manière que la somme des angles formés autour de ce point soit égale à quatre droits :

$$y\left(2 - \frac{4}{x}\right) = 4, \quad \text{d'où } y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Or $y$ doit être entier ; donc $x-2$ doit être un diviseur de 4 ; donc $x = 3$, 4 ou 6 et alors $y = 6$, 4 ou 3 ; c'est-à-dire qu'il faudra assembler, autour d'un point, 6 triangles équilatéraux, 4 carrés ou 3 hexagones réguliers.

Mais, en prenant diverses sortes de polygones réguliers, il y a bien d'autres combinaisons : 1° des triangles équilatéraux avec des carrés, ou des hexagones, ou des dodécagones ; 2° des carrés avec des octogones, etc.

13. Un pentagone équilatéral est régulier s'il a trois angles égaux ; car la circonférence passant par les sommets de ces trois angles passe aussi par ceux des deux autres.

14. Connaissant les périmètres de deux polygones réguliers inscrits à un cercle, dont l'un a $n$ côtés et l'autre $2n$, trouver le périmètre du polygone régulier de $4n$ côtés inscrit au même cercle.

15. Connaissant les rayons R et R′ de deux polygones réguliers isopérimètres de $n$ et $2n$ côtés, trouver le rayon R″ du polygone régulier isopérimètre de $4n$ côtés.

16. Dans un polygone régulier de $n$ côtés, la somme des carrés des distances d'un point quelconque aux $n$ sommets est égale à $n$ fois la somme des carrés du rayon et de la distance du point considéré au centre.

17. Dans un hexagone régulier ABCDEF, les diagonales AC, BD, CE, DF, EA, FB forment en se coupant un second hexagone régulier. Calculer le rapport des côtés des deux hexagones.

18. Prouver que les côtés du premier et du troisième pentédécagone régulier sont égaux l'un à la différence et l'autre à la somme de l'apothème du décagone régulier convexe inscrit au même cercle et de la hauteur du triangle équilatéral construit sur le côté de ce décagone.

Théorèmes analogues pour les deux autres pentédécagones. Il suffit d'interpréter géométriquement les formules du n° 273.

20. Etant donné un cercle, construire sept hexagones réguliers tels que l'un d'eux ait même centre que le cercle et que chacun des autres ait un côté commun avec celui-là et deux sommets sur le cercle.

21. On construit, sur le diamètre AB d'une circonférence, un triangle équilatéral ABC ; on divise AB en $n$ parties égales et l'on joint l'extrémité D de la deuxième division au point C. Soit E le point où le prolongement de CD coupe la circonférence. Démontrer que l'arc AE est la $n^e$ partie de la circonférence, approximativement en général et rigoureusement pour $n = 3, 4, 6$.

---

# CHAPITRE VIII

## LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE

280. Nous avons pu [14] comparer directement des arcs d'une même circonférence et en définir l'égalité et l'addition. Mais si l'on veut comparer des arcs de circonférences de rayons différents, ou un arc de cercle avec une portion de droite, comme la comparaison directe est impossible, il est nécessaire de ramener la longueur d'un arc de cercle à celle d'une ligne droite, et, pour cela, nous adopterons la définition suivante.

Définition. — *On appelle longueur d'un arc de cercle la limite* (1) *vers laquelle tend la longueur d'une ligne brisée convexe inscrite à cet arc, lorsque tous les côtés de cette brisée tendent vers zéro suivant une loi quelconque, et que, par suite, leur nombre augmente indéfiniment.*

Pour justifier cette définition, il faut prouver que cette limite *existe* et qu'elle est *unique*, c'est-à-dire indépendante de la loi suivant laquelle les côtés de la brisée inscrite tendent vers zéro.

1° Soient (fig. 252) AB un arc de cercle et $p_1$ le péri-

---

(1) Pour les principes sur les limites, voir le *Cours d'algèbre* de M. Niewenglowski et la note sur la mesure des grandeurs.

mètre d'une brisée convexe ACDB inscrite à cet arc. Joignons les sommets de cette brisée aux milieux des arcs AC, CD, DB, nous formons une seconde brisée inscrite ayant deux fois plus de côtés et dont le périmètre $p_2$ est plus grand que celui de la première. En opérant de même sur cette nouvelle brisée, nous en aurons une troisième, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite de brisées inscrites dont les périmètres

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\dots,\ p_n,$$

vont en augmentant, tout en restant inférieurs au périmètre $\beta$ d'une brisée *fixe* AHIKB enveloppant l'arc AB. Donc ces périmètres $p_1$, $p_2$,..., $p_n$ tendent vers une limite $\lambda$.

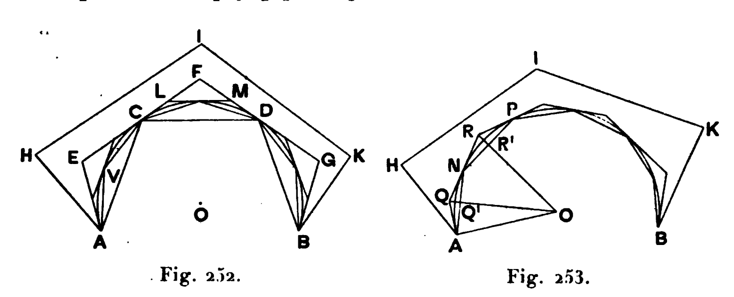


Fig. 252. Fig. 253.

2° A chaque brisée inscrite faisons correspondre une brisée circonscrite obtenue en menant des tangentes par les sommets de la brisée inscrite; aux brisées inscrites $p_1, p_2, \dots, p_n$ correspondent des brisées circonscrites, dont les périmètres

$$P_1,\ P_2,\dots,\ P_n$$

vont en diminuant, car on remplace à chaque fois une ligne brisée telle que LFM par une ligne droite LM. Mais ces périmètres $P_1$, $P_2$,..., $P_n$ restent supérieurs à $p_1$; donc ils tendent vers une limite $\lambda'$.

Je dis que $\lambda = \lambda'$. En effet, soient (fig. 253) ANP... B

et AQR...B les brisées inscrites et circonscrites correspondantes de périmètres $p_n$ et $P_n$. Soient Q′, R′,... les points de rencontre de OQ, OR,... avec AN, NP,... on a

$$P_n - p_n = (AQ - AQ') + (QN - Q'N) + (NR - NR') + \dots$$

Or, les triangles AQQ′, OAQ′ étant semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires, on a

$$\frac{AQ}{AQ'} = \frac{OA}{OQ'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AQ - AQ'}{AQ'} = \frac{OA - OQ'}{OQ'}.$$

Mais OA — OQ′ est moindre que AQ′ ou $\frac{1}{2}$ AN; donc, *a fortiori*, en appelant $a^n$ le plus grand côté de la brisée inscrite ANP...B, on a

$$OA - OQ' < \frac{1}{2} a_n.$$

D'ailleurs, pour $n > 2$, tous les côtés de la brisée $p_n$ sont moindres que le côté du triangle équilatéral inscrit; donc OQ′ est plus grand que l'apothème de ce triangle équilatéral, c'est-à-dire plus grand que la moitié du rayon $r$. Par conséquent,

$$\frac{AQ - AQ'}{AQ'} < \frac{\frac{1}{2} a_n}{\frac{1}{2} r},$$

d'où

$$AQ - AQ' < \frac{a_n}{r} \times AQ'.$$

De même

$$QN - Q'N < \frac{a_n}{r} \times Q'N,$$

$$NR - NR' < \frac{a_n}{r} \times NR',$$

......................

Donc, en ajoutant membre à membre, on a

$$P_n - p_n < \frac{a_n}{r} \times p_n\,;$$

et, *a fortiori*, en désignant toujours par $\beta$ le périmètre de la brisée enveloppante *fixe* AHIKB,

$$P_n - p_n < \frac{a_n}{r} \times \beta. \qquad (1)$$

Mais, quand $n$ augmente indéfiniment, $a_n$ tend vers zéro. Donc il en est de même de $P_n - p_n$ ; par conséquent, la limite de $P_n$ est la même que celle de $p_n$ :

$$\lambda = \lambda'.$$

3° Cette limite commune $\lambda$ est plus grande que le périmètre de toute brisée *convexe* inscrite à l'arc AB et plus petite que le périmètre de toute brisée circonscrite.

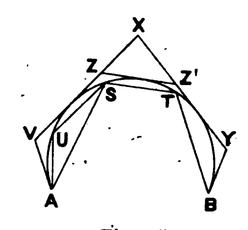


Fig. 254.

En effet, étant donnée une brisée inscrite convexe quelconque ASTB (fig. 254) de périmètre $p$, on peut toujours en trouver une autre AUSTB dont le périmètre $q$ soit plus grand que $p$, en joignant deux sommets consécutifs, A et S par exemple, à un point U de l'arc AS.

Si donc $\lambda$ était inférieur ou égal à $p$, on aurait

$$\lambda \leq p < q < P_n\,;$$

et alors la différence $P_n - \lambda$ resterait constamment supérieure à $q - p$ et ne pourrait pas tendre vers zéro, lorsque $n$ augmente indéfiniment. Il faut donc que $\lambda > p$.

De même, étant donnée une brisée circonscrite quelconque AVXYB de périmètre P, on peut toujours en trou-

ver une autre AVZZ′YB dont le périmètre Q soit moindre que P, en menant la tangente en un point quelconque de l'arc AB, qui rencontre le périmètre P au moins en deux points Z, Z′. Si donc $\lambda$ était supérieur ou égal à P, on aurait

$$p_n < \mathrm{Q} < \mathrm{P} \leqq \lambda\,;$$

et alors la différence $\lambda - p_n$ resterait constamment supérieure à P — Q et ne pourrait pas tendre vers zéro. Il faut donc que $\lambda < \mathrm{P}$.

4° Soit

$$q_1,\ q_2,\ q_3 \ldots,\ q_n$$

une suite de brisées inscrites convexes assujetties à la seule condition que tous les côtés de $q_n$ tendent vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment [1]. Je dis que $q_n$ tend vers $\lambda$ lorsque $n$ augmente indéfiniment.

En effet, soit $\mathrm{Q}_n$ la brisée circonscrite correspondant à $q_n$. On a (3°)

$$q_n < \lambda < \mathrm{Q}_n.$$

Donc $\lambda - q_n$ est moindre que $\mathrm{Q}_n - q_n$. Mais, en vertu de la formule (1), en supposant, ce qui est permis, tous les côtés de la brisée $q_n$ moindres que le côté du triangle équilatéral inscrit, on a

$$\mathrm{Q}_n - q_n < \frac{b_n}{r} \times \beta,$$

$\beta$ étant une longueur *fixe,* et $b_n$ désignant le plus grand côté de la brisée $q_n$. Mais, par hypothèse, $b_n$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment; donc il en est de même de $\mathrm{Q}_n - q_n$ et, *a fortiori,* de $\lambda - q_n$, c'est-à-dire que $q_n$ a pour limite $\lambda$.

---

[1] Cela veut dire qu'à toute longueur $\alpha$ on peut faire correspondre un entier $k$ tel que, pour $n > k$, tous les côtés de $q_n$ soient moindres que $\alpha$.

281. Tout ce que nous venons de dire s'applique à une circonférence entière aussi bien qu'à un arc de circonférence. Donc, en particulier,

1° *La longueur d'une circonférence est la limite commune vers laquelle tendent les périmètres des polygones réguliers convexes inscrits ou circonscrits, lorsque le nombre de leurs côtés augmente indéfiniment.*

2° *La longueur d'une circonférence est plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit convexe et plus petite que le périmètre de tout polygone circonscrit.*

282. ***Théorème.*** — *Les longueurs de deux circonférences sont proportionnelles à leurs rayons.*

Soient C et C′ les longueurs de deux circonférences ; R et R′ leurs rayons ; $p_n$ et $p'_n$ les périmètres de deux polygones réguliers de $n$ côtés inscrits à ces deux circonférences. On a [267]

$$\frac{p_n}{R} = \frac{p'_n}{R'}.$$

Or, si $n$ augmente indéfiniment, $p_n$ et $p'_n$ ont pour limites respectives C et C′; donc

$$\frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}.$$

283. Corollaires. — I. — L'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Donc *le rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant,* c'est-à-dire un nombre

qui est le même pour toutes les circonférences. On désigne ce nombre par $\pi$ :

$$\frac{C}{2R} = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi R. \qquad (1)$$

Ainsi, *la longueur d'une circonférence s'obtient en multipliant celle de son diamètre par le nombre* $\pi$.

Nous verrons plus loin comment on peut trouver des valeurs approchées de ce nombre $\pi$.

284. II. — La longueur d'un arc d'un degré d'une circonférence de rayon R est $\frac{2\pi R}{360}$ ou $\frac{\pi R}{180}$ ; donc la longueur $l$ d'un arc de $n$ degrés est donnée par la formule

$$l = \frac{\pi R n}{180}. \qquad (2)$$

285. III. — *L'angle au centre qui intercepte un arc égal au rayon, dans une circonférence quelconque, est indépendant du rayon de la circonférence.*

En effet, soient R le rayon d'une circonférence, $\omega$ un angle au centre qui intercepte un arc égal à R. Comparons cet angle $\omega$ à un angle au centre droit D, qui intercepte un arc égal à $\frac{2\pi R}{4}$ ou $\frac{1}{2}\pi R$ ; en écrivant que $\omega$ et D sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent, on a

$$\frac{\omega}{D} = \frac{R}{\frac{1}{2}\pi R} = \frac{2}{\pi},$$

d'où

$$\omega = D \times \frac{2}{\pi}. \qquad (3)$$

Donc cet angle $\omega$ est *constant*, c'est-à-dire indépendant de R.

Pour l'évaluer en degrés, il suffit de remplacer, dans la formule précédente, D par 90° ; ce qui donne

$$\omega = 180° \times \frac{1}{\pi}.$$

En remplaçant $\frac{1}{\pi}$ par la valeur 0,31830988..., que nous trouverons plus loin, on obtient

$$\omega = 57°17'44'',80.$$

On arriverait au même résultat en faisant $l = R$ dans la formule (2).

286. IV. — *Dans deux circonférences, le rapport de deux arcs semblables,* c'est-à-dire correspondant à des angles au centre égaux, *est égal au rapport des rayons, et réciproquement.*

En effet, soit $l$ la longueur d'un arc de circonférence de rayon R et soit A l'angle au centre correspondant. Considérons, dans la même circonférence, l'angle au centre $\omega$ dont l'arc est égal au rayon ; en écrivant que A et $\omega$ sont entre eux comme les arcs qu'ils interceptent, on a

$$\frac{A}{\omega} = \frac{l}{R}. \tag{4}$$

De même, soit $l'$ la longueur d'un arc de circonférence de rayon R' et soit A' l'angle au centre correspondant ; on a

$$\frac{A'}{\omega} = \frac{l'}{R'}.$$

Par conséquent, si $A = A'$, on a

$$\frac{l}{R} = \frac{l'}{R'} \quad \text{ou} \quad \frac{l}{l'} = \frac{R}{R'};$$

et réciproquement.

287. Dans la formule (4), $\frac{A}{\omega}$ est le nombre qui mesure l'angle A quand on prend $\omega$ pour unité. En désignant ce nombre par $a$, on a

$$a = \frac{l}{R} \quad \text{ou} \quad l = R \times a. \tag{5}$$

Donc, *quand on prend pour unité d'angle l'angle* $\omega$ *qui intercepte sur une circonférence quelconque décrite de son sommet comme centre un arc égal au rayon,*

1° *La longueur d'un arc de cercle est égale à celle de son rayon multipliée par le nombre qui mesure l'angle au centre correspondant ;*

2° *La mesure d'un angle quelconque est le rapport constant qui existe entre l'arc qu'il intercepte sur une circonférence quelconque décrite de son sommet comme centre et le rayon de cette circonférence.*

En particulier, la mesure d'un angle droit est $\frac{\frac{1}{2}\pi R}{R} = \frac{\pi}{2}$ et celle d'un angle d'un degré est $\frac{\pi}{2 \times 90} = \frac{\pi}{180}$.

288. Changement d'unité. — Soient $a$, $a'$, $a''$ les nombres qui mesurent un même angle A, suivant qu'on prend pour unité l'angle $\omega$ dont l'arc est égal au rayon, ou l'angle droit D, ou l'angle d'un degré, que nous appellerons $\Delta$. On a

$$a = \frac{A}{\omega}, \quad a' = \frac{A}{D}, \quad a'' = \frac{A}{\Delta}.$$

Connaissant l'un des trois nombres $a$, $a'$, $a''$, il est aisé de calculer les deux autres. En effet,

$$\frac{A}{\omega} = \frac{A}{D} \times \frac{D}{\omega} = \frac{A}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\omega}.$$

Or, $\frac{D}{\omega}$ et $\frac{\Delta}{\omega}$ sont les nombres qui mesurent D et $\Delta$ quand on prend $\omega$ pour unité, savoir $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{180}$. Donc

$$a = a' \times \frac{\pi}{2} = a'' \times \frac{\pi}{180}.$$

On en déduit la relation $a'' = 90\,a'$, qui résulte d'ailleurs de ce que l'angle droit vaut 90 degrés.

### CALCUL DE $\pi$

289. Comme $\pi = \frac{C}{2R}$, pour calculer $\pi$, on peut se donner R et calculer des valeurs approchées de C : c'est la *méthode des périmètres ;* ou bien se donner C et calculer des valeurs approchées de R : c'est *la méthode des isopérimètres*.

### MÉTHODE DES PÉRIMÈTRES

290. Faisons $R = \frac{1}{2}$ d'où $C = \pi$ ; il en résulte que les périmètres des polygones réguliers convexes inscrits au cercle de rayon $\frac{1}{2}$ sont des valeurs approchées de $\pi$ *par défaut*, et que les périmètres des polygones réguliers circonscrits à ce même cercle sont des valeurs approchées de $\pi$ *par excès*.

Cela posé, calculons d'abord les périmètres $p_0$ et $P_0$ de deux polygones réguliers convexes de $n$ côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle de rayon $\frac{1}{2}$ ; nous pourrons ensuite calculer les périmètres $p_1$ et $P_1$ des polygones réguliers de $2n$ côtés, inscrit et circonscrit, au moyen des formules

$$P_1 = \frac{2P_0p_0}{P_0 + p_0} \quad \text{et} \quad p_1 = \sqrt{P_1p_0}; \tag{1}$$

nous calculerons de même les périmètres $p_2$ et $P_2$ des polygones réguliers de $2^2 \times n$ côtés, inscrit et circonscrit ; et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi deux séries de nombres

$$p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_k$$
$$P_0,\ P_1,\ P_2, \ldots,\ P_k,$$

qui iront, les uns en croissant, les autres en décroissant, et qui auront pour limite commune C, c'est-à-dire $\pi$.

D'ailleurs, comme $p_k < \pi < P_k$ si on prend $p_k$ ou $P_k$ comme valeur approchée de $\pi$, l'erreur commise sera moindre que $P_k - p_k$. Mais [277]

$$P_1 - p_1 < \frac{1}{4}(P_0 - p_0);$$

de même,

$$P_2 - p_2 < \frac{1}{4}(P_1 - p_1) < \frac{1}{4^2}(P_0 - p_0);$$

et, en général,

$$P_k - p_k < \frac{1}{4^k}(P_0 - p_0).$$

Donc, si l'on veut que la différence entre $\pi$ et $p_k$ ou $P_k$ soit moindre qu'une quantité donnée $\alpha$, il suffira de choisir $k$ de façon que

$$\frac{1}{4^k}(P_0 - p_0) < \alpha.$$

Par exemple, prenons pour $p_0$ et $P_0$ les périmètres des hexagones réguliers inscrit et circonscrit au cercle de rayon $\frac{1}{2}$, on a [269 et ex. 5 p. 265]

$$p_0 = 6 \times \frac{1}{2} = 3, \quad P_0 = 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = 3{,}46\ldots,$$

donc

$$P_0 - p_0 = 0{,}46\ldots < \frac{1}{2}.$$

Si donc on veut que $p_k$ et $P_k$ soient des valeurs approchées de $\pi$ à 0,001 près, par exemple, il suffira de choisir $k$ de façon que

$$\frac{1}{4^k} \times \frac{1}{2} < \frac{1}{1000} \quad \text{ou} \quad 4^k > 500.$$

Il suffira donc de faire $k = 5$.

En faisant les calculs, on trouve

$$p_8 = 3{,}1414\ldots, \quad P_8 = 3{,}1419\ldots$$

Donc

$$3{,}1414 < \pi < 3{,}1420,$$

et 3,141 est une valeur approchée de $\pi$ à 0,001 près, *par défaut.*

### MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES

291. Faisons $C = 2$, d'où $\frac{1}{\pi} = R$, c'est-à-dire que $\frac{1}{\pi}$ est le rayon d'une circonférence de longueur égale à 2. Nous allons montrer que, si l'on construit un polygone régulier convexe quelconque dont le périmètre soit égal à 2, l'apothème $a$ et le rayon $r$ de ce polygone sont des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$, par défaut et par excès.

En effet, le périmètre de ce polygone étant plus grand que la longueur $2\pi a$ de la circonférence inscrite et plus petit que la longueur $2\pi r$ de la circonférence circonscrite, on a

$$2\pi a < 2 < 2\pi r, \quad \text{d'où} \quad a < \frac{1}{\pi} < r.$$

De plus, il est aisé de voir que $a$ et $r$ sont des valeurs aussi approchées de $\frac{1}{\pi}$ qu'on voudra ; pour cela il suffit de montrer que, étant donné un nombre quelconque $\alpha$, on peut prendre le nombre $n$ des côtés du polygone assez grand pour que la différence $r - a$ soit moindre que $\alpha$. En effet, dans le triangle OBC (fig. 255), qui a pour côtés le rayon, l'apothème et le demi-côté du polygone, on a

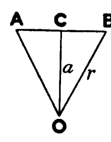


Fig. 255.

$$r - a < BC.$$

Or, le périmètre du polygone étant égal à 2, chaque côté est égal à $\frac{2}{n}$, donc BC $= \frac{1}{n}$. Par suite,

$$r - a < \frac{1}{n}.$$

Donc, pour que $r - a$ soit moindre que $\alpha$, il suffit que

$$\frac{1}{n} < \alpha, \quad \text{ou} \quad n > \frac{1}{\alpha}.$$

292. Cela posé, calculons l'apothème $a_0$ et le rayon $r_0$ du carré de périmètre égal à 2 ; chaque côté du carré étant égal à $\frac{2}{4}$, on a

$$a_0 = \frac{1}{4}, \qquad r_0 = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Nous pourrons ensuite calculer l'apothème $a_1$ et le rayon $r_1$ de l'octogone régulier de périmètre 2, au moyen des formules [278] :

$$a_1 = \frac{a_0 + r_0}{2}, \qquad r_1 = \sqrt{r_0 a_1}.$$

Nous calculerons de même l'apothème $a_2$ et le rayon $r_2$ du polygone régulier de 16 côtés dont le périmètre est encore égal à 2 ; et ainsi de suite en doublant à chaque fois le nombre des côtés. Nous obtiendrons ainsi deux séries de nombres

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$$
$$r_0, r_1, r_2, \dots, r_k,$$

qui iront, les uns en croissant, les autres en décroissant [279] et qui auront pour limite commune $\frac{1}{\pi}$.

Comme $a_k < \frac{1}{\pi} < r_k$, si l'on prend $a_k$ ou $r_k$ comme valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, l'erreur commise sera moindre

que $r_k - a_k$ et on montrera comme au n° 290 que

$$r_k - a_k < \frac{1}{4^k}(r_0 - a_0),$$

ce qui permettra de déterminer $k$ de façon que $r_k - a_k$ soit moindre qu'une quantité quelconque donnée à l'avance.

D'ailleurs $a_0$ ou $\frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre o et $\frac{1}{2}$, et $r_0$ ou $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$; on arrive ainsi à ce théorème énoncé par le géomètre Schwabb (Nancy, 1813):

*Si on forme une suite de nombres*

$$0, \frac{1}{2}, a_0, r_0, a_1, r_1, \ldots$$

*commençant par o et $\frac{1}{2}$, et dont chacun, à partir du troisième, soit alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux précédents, les nombres ainsi obtenus ont pour limite $\frac{1}{\pi}$.*

En effectuant les calculs, on trouve

$$a_4 = 0{,}3180\ldots \quad r_4 = 0{,}3184\ldots$$

Donc,

$$0{,}318 < \frac{1}{\pi} < 0{,}3185$$

et 0,318 est une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$, à un demi-millième près, par défaut.

293. On a trouvé, par d'autres méthodes plus expéditives,

$$\pi = 3{,}14159\,26535\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ldots,$$

Quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, on peut prendre pour $\pi$ la valeur $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$, trouvée par Archimède.

Dans les applications ordinaires, on prend, pour $\pi$, la valeur 3,1416 approchée par excès à 0,00001 près, et pour $\frac{1}{\pi}$ la valeur 0,31831 approchée par excès à 0,00000012 près.

Adrien Métius, mathématicien hollandais du XVII[e] siècle, a trouvé pour $\pi$ la valeur approchée $\frac{355}{113}$, que l'on peut se rappeler en écrivant le nombre 113355 et en le séparant en deux : 113 et 355.

294. Remarque. — La méthode des périmètres est, au fond, identique à celle des isopérimètres. En effet, les formules (1) et (2) du n° 276 peuvent s'écrire

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_0} + \frac{1}{p_0}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{p_1} = \sqrt{\frac{1}{p_0} \times \frac{1}{P_1}}.$$

Donc, si on forme la suite

$$\frac{1}{P_0},\ \frac{1}{p_0},\ \frac{1}{P_1},\ \frac{1}{p_1},\ \frac{1}{P_2},\ \frac{1}{p_2},\ldots,$$

chacun des nombres de cette suite, à partir du troisième, est alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux précédents.

Comme $P_k$ et $p_k$ tendent vers $\pi$, les nombres de cette suite auront pour limite $\frac{1}{\pi}$.

D'ailleurs, si on prend pour $p_0$ et $P_0$ les périmètres des carrés inscrit et circonscrit au cercle de rayon $\frac{1}{2}$, on a

$$P_0 = 4,\ p_0 = 2\sqrt{2};$$

d'où

$$\frac{1}{P_0} = \frac{1}{4} = a_0,\quad \frac{1}{p_0} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = r_0$$

on retombe sur la suite de Schwabb.

EXERCICES

1. Quelle est la longueur d'une circonférence dont le rayon est de $0^m,65$ ?

Réponse : $C = 2\pi \times 0,65 = 4^m,084$.

2. Quel est le rayon d'une circonférence dont la longueur est de $5^m,8$ ?

$$\text{Réponse : } R = \frac{5,8}{2} \times \frac{1}{\pi} = 2,9 \times 0,3183 = 0^m,923.$$

3. Trouver la longueur d'un arc de $25°12'$ dans un cercle de rayon égal à 6 mètres.

— Un arc d'une minute a pour longueur $\frac{2\pi \times 6}{360 \times 60}$ ; or, $25°12'$ valent $25 \times 60 + 12 = 1.512$ minutes ; donc la longueur de l'arc en question est

$$\frac{2\pi \times 6 \times 1512}{360 \times 60} = \frac{2\pi \times 42}{100} = 2^m,64.$$

4. Trouver le rayon du cèrcle dans lequel un arc de $50°$ a 4 mètres de longueur.

— La longueur d'un arc de $1°$ est $\frac{4}{50}$, donc celle de la circonférence est $\frac{4 \times 360}{50}$ ; par conséquent,

$$2\pi R = \frac{4 \times 360}{50}, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{4 \times 36}{10} \times \frac{1}{\pi} = 4^m,58.$$

5. Aux deux extrémités d'un diamètre d'un cercle, on mène, dans le même sens, deux perpendiculaires, l'une égale au triple du rayon, l'autre égale au tiers du côté du triangle équilatéral inscrit ; la droite qui joint les extrémités de ces perpendiculaires est égale à la demi-circonférence à moins de $\frac{1}{10.000}$ du rayon, par défaut. (Construction de Kolkanski.)

6. Démontrer que $\pi$ est la limite vers laquelle tend l'expression

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}};$$

lorsque $n$ augmente indéfiniment, $n$ étant le nombre des radicaux superposés.

— On y arrive en calculant le périmètre du polygone régulier de $2^{n+1}$ côtés inscrit dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

L'apothème de ce polygone est égal au quart de

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}};$$

donc

$$\lim \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}} = 2.$$

Le démontrer directement.

7. Etant donnés sur une circonférence une série de points équidistants A, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ....

1° Démontrer que

$$AA_1 > AA_2 - AA_1 > AA_3 - AA_2 > \ldots.$$

— En abaissant $A_2C$ et $A_2D$ perpendiculaires sur $AA_1$ et sur $AA_3$ respectivement, on a

$$CA_1 < AA_2 - AA_1, \quad DA_3 > AA_3 - AA_2.$$

Or $CA_1 = DA_3$, etc.

Il en résulte que

$$\frac{AA_n}{AA_{n+p}} > \frac{n}{n+p}.$$

En déduire que le périmètre d'un polygone régulier inscrit à un cercle donné augmente en même temps que le nombre des côtés.

2° Soient $B_1$, $B_2$, ... les points où les rayons passant par $A_1$, $A_2$, ... rencontrent la tangente en A. Démontrer que

$$BB_1 < B_1B_2 < B_2B_3 < \ldots$$

et par suite,

$$\frac{BB_n}{BB_{n+p}} < \frac{n}{n+p}.$$

En déduire que le périmètre d'un polygone régulier circonscrit diminue à mesure que le nombre des côtés augmente.

8. De tous les polygones convexes de $n$ côtés inscrits à un même cercle, celui qui a le plus grand périmètre est le polygone régulier inscrit de $n$ côtés.

— Soit P un polygone inscrit non régulier et soit $\alpha$ la $n^e$ partie de la circonférence ; l'un au moins des côtés de P sous-tend un arc $\beta$ plus grand que $\alpha$ et l'un au moins sous-tend un arc $\gamma$ plus petit que $\alpha$. En remplaçant ces deux côtés par deux autres sous-tendant, l'un un arc égal à $\alpha$, l'autre un arc égal à $\beta + \gamma - \alpha$, on obtiendra un nouveau polygone inscrit $P_1$ et on démontrera aisément que son périmètre est plus grand que celui de P. On opérera de même sur $P_1$, et ainsi de suite. Au bout de $n - 1$ opérations au plus, on arrivera à un polygone régulier $P_k$, dont le périmètre sera plus grand que ceux des précédents, en particulier, plus grand que celui de P.

Un polygone inscrit de $n-p$ côtés peut être considéré comme un polygone de $n$ côtés dont $p$ sont nuls. Donc le polygone régulier inscrit de $n$ côtés a un périmètre plus grand que tous les polygones inscrits de $n-p$ côtés, réguliers ou non.

9. De tous les polygones de $n$ côtés *au plus* circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus petit périmètre est le polygone régulier circonscrit de $n$ côtés.

Démonstration analogue.

En déduire que le périmètre d'un polygone régulier circonscrit diminue à mesure que le nombre des côtés augmente.

10. Le périmètre d'un polygone régulier inscrit est plus voisin de la longueur de la circonférence que celui du polygone régulier circonscrit semblable.

— On s'appuiera sur la formule

$$P' = \frac{2Pp}{P + p}$$

du n° 276 et on démontrera que $P' < \dfrac{P+p}{2}$.

# LIVRE IV

## CHAPITRE PREMIER

## MESURE DES AIRES

295. On appelle *aire* l'étendue d'une portion limitée de surface.

On dit qu'une portion de surface A est la *somme* de plusieurs autres portions de surfaces B, C, D, lorsque A est formée de parties respectivement superposables à B, C, D.

On dit qu'une portion de surface C est la *différence* entre deux portions de surfaces A et B lorsque A est la somme de B et de C.

On dit que les aires de deux portions de surfaces sont *égales*, ou que ces deux portions de surfaces sont *équivalentes*, quand on peut les considérer comme sommes ou comme différences de portions de surfaces superposables chacune à chacune.

Par conséquent, deux portions de surfaces peuvent être équivalentes, sans être superposables.

On peut répéter pour les aires tout ce que nous avons dit des segments de droites [7, 8]. En particulier, la *mesure* d'une aire, c'est le rapport de cette aire à une autre prise pour unité. Dans tout ce qui va suivre, nous prenons pour unité d'aire celle d'un carré ayant pour côté l'unité de longueur.

296. On appelle *dimensions* d'un rectangle ABCD (fig. 256) deux côtés consécutifs, AB et BC. L'un de ces deux côtés s'appelle la *base* et l'autre la *hauteur*.

297. ***Théorème***. — *Le rapport de deux rectangles qui ont une dimension commune est égal au rapport des deux autres dimensions.*

Soient (fig. 256) deux rectangles ABCD, EFGH dans lesquels BC = EH. Supposons, par exemple,


Fig. 256.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{3}{5}.$$

Cela veut dire que, si l'on partage AB en 3 parties égales et EF en 5 parties égales, toutes ces parties sont égales entre elles. Menons par les points de division des parallèles aux côtés BC et EH; nous formons ainsi huit rectangles égaux, comme ayant leurs côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que le rapport des rectangles ABCD, EFGH est égal à $\frac{3}{5}$, par suite, égal à $\frac{AB}{EF}$.

Si le rapport $\frac{AB}{EF}$ est un nombre irrationnel, en imitant la démonstration du n° 104, on voit immédiatement que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences

$$AB - \frac{m}{n} EF$$

et

$$ABCD - \frac{m}{n} EFGH$$

sont de même signe.

Donc, dans tous les cas, les rapports $\frac{ABCD}{EFGH}$ et $\frac{AB}{EF}$ sont égaux.

298. REMARQUE. — Le théorème précédent peut s'énoncer des deux façons suivantes :

*Deux rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

*Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

299. ***Théorème***. — *Le rapport de deux rectangles quelconques est égal au produit des rapports de leurs bases et de leurs hauteurs.*

Soient R et R′ deux rectangles de bases B et B′ et de hauteurs H et H′. Considérons un troisième rectangle R′ ayant pour base B′ et pour hauteur H, c'est-à-dire ayant même hauteur que R et même base que R′. On aura donc, d'après le théorème précédent,

$$\frac{R}{R''} = \frac{B}{B'},$$

$$\frac{R''}{R'} = \frac{H}{H'};$$

d'où, en multipliant membre à membre et en remarquant que $\frac{R}{R''} \times \frac{R''}{R'} = \frac{R}{R'}$ (voir : Note sur la mesure des grandeurs),

$$\frac{R}{R'} = \frac{B}{B'} \times \frac{H}{H'}.$$

300. ***Théorème***. — *Quand on prend pour unité d'aire le carré qui a pour côté l'unité de longueur, l'aire d'un rectangle a pour mesure le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur.*

Soient R un rectangle, B sa base, H sa hauteur. Nous prenons pour unité d'aire le carré Q qui a pour côté l'unité de longueur U ; la mesure de R est $\frac{R}{Q}$ et celles

de B et de H sont $\frac{B}{U}$ et $\frac{H}{U}$. Or, d'après le théorème précédent,

$$\frac{R}{Q} = \frac{B}{U} \times \frac{H}{U}.$$

Donc

$$\text{mesure de R} = (\text{mesure de B}) \times (\text{mesure de H}),$$

ce que l'on écrit, *pour abréger*,

$$R = B \times H,$$

et que l'on énonce :

*L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

301. Corollaire. — Un carré est un rectangle dont les côtés sont égaux. Donc

*L'aire d'un carré est égale au carré de son côté.*

302. Définition. — On appelle *base* d'un parallélogramme l'un quelconque de ses côtés et *hauteur* la distance de ce côté au côté opposé.

303. ***Théorème***. — *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (fig. 257) ABCD un parallélogramme ayant pour base AB et pour hauteur BE ou AF. Il suffit de prouver que ce parallélogramme est équivalent au rectangle ABEF. En effet, les deux triangles rectangles AFD et BEC sont égaux, comme ayant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit égaux. Or, si de la figure totale ABCF on retranche le triangle AFD, il reste le parallélo-

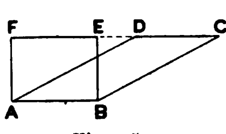


Fig. 257.

gramme ; au contraire, si on retranche le triangle BEC, il reste le rectangle. Donc l'aire du parallélogramme est égale à celle du rectangle et, par suite, a pour mesure AB $\times$ BE, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

304. Corollaire. — *Deux parallélogrammes* ABCD, ABEF (fig. 258) *qui ont même base et même hauteur sont équivalents.*

Il est indispensable pour la théorie que nous exposerons plus loin (Note sur la mesure des polygones), de s'assurer que ces deux parallélogrammes peuvent être décomposés en parties superposables chacune à chacune. Cela est évident, si les bases supérieures CD, EF ont une partie commune (fig. 258); car

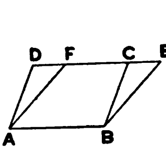


Fig. 258.

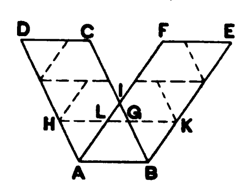


Fig. 259.

alors les deux parallélogrammes ont une partie commune ABCF et les parties non communes sont des triangles égaux.

Si les bases supérieures n'ont pas de partie commune (fig. 259), les côtés BC et AF se croisent en un point I. Partageons le côté BC en un nombre $n$ de parties égales assez grand pour que chaque partie soit moindre que BI, et, par les points de division, menons des parallèles à la base AB, de manière à partager chacun des parallélogrammes donnés en $n$ parallélogrammes partiels. Les deux premiers parallélogrammes ABGH, ABKL ont une partie commune ABGL et les parties non communes AHL, BGK sont des triangles égaux; mais les autres parallélogrammes partiels sont superposables à ces deux-là ; donc on pourra décomposer chacun d'eux en un trapèze égal à ABGL et en un triangle égal à AHL ou BGK; de sorte que

les deux parallélogrammes ABCD, ABEF seront décomposés en parties superposables chacune à chacune [1].

305. ***Théorème.*** — *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Soient (fig. 260) ABC un triangle, BC un côté pris pour base et AH la hauteur correspondante. Par le milieu D de BC menons la parallèle à AB, qui passe par le milieu E de AC et qui rencontre en F la parallèle à BC menée par A. Les triangles EDC, EFA sont égaux, comme ayant un côté égal, EC = EA, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc le triangle ABC est équivalent au parallélogramme BDFA ; mais l'aire de ce parallélogramme a pour mesure BD $\times$ AH ou $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AH; donc il en est de même de celle du triangle.

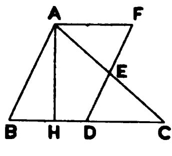


Fig. 260.

*Autrement.* — Soit (fig. 261) D le point de rencontre de la parallèle à BC menée par A avec la parallèle à AB menée par C. Les triangles ABC, CDA étant égaux [74], le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD ; mais l'aire de ce parallélogramme est égale à BC $\times$ AH ; donc celle du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AH.

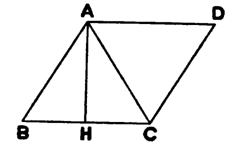


Fig. 261.

306. Corollaire. — *Deux triangles de même base et de même hauteur sont équivalents. Deux triangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs et vice versa.*

(1) Cette démonstration est empruntée à l'*Allgemeine Arithmetik* de M. O. Stoltz. Voir une autre démonstration dans le *Manuel de Géométrie* de L. Gérard.

EXPRESSIONS DIVERSES DE L'AIRE D'UN TRIANGLE

307. Soient $a$, $b$, $c$ les trois côtés, $h_a$, $h_b$, $h_c$ les hauteurs correspondantes, $p$ le demi-périmètre et S l'aire d'un triangle ABC. On a :

$$2\,S = ah_a = bh_b = ch_c. \quad (1)$$

Or nous avons trouvé [185]

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,;$$

donc

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,. \quad (2)$$

308. Des formules (1) on tire

$$a = \frac{2S}{h_a}, \qquad b = \frac{2S}{h_b}, \qquad c = \frac{2S}{h_c}\,;$$

d'où

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right) \quad (3)$$

$$p-a = \frac{1}{2}(b+c-a) = S\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right) \quad (4)$$

$$p-b = \frac{1}{2}(c+a-b) = S\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right) \quad (5)$$

$$p-c = \frac{1}{2}(a+b-c) = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right). \quad (6)$$

En substituant dans (2) et en divisant par $S^2$, on a

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)},$$

d'où l'on tire la valeur de S et, par suite, celles de $a$, $b$, $c$ en fonction des trois hauteurs.

309. Soit R le rayon du cercle circonscrit. On a [186]

$$bc = 2Rh_a ;$$

si l'on multiplie les deux membres par $a$, il vient, en remarquant que $ah_a = 2S$,

$$abc = 4RS, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{abc}{4R}. \tag{7}$$

310. Soient O le centre et $r$ le rayon du cercle inscrit (fig. 262). En menant OA, OB, OC, on partage le triangle ABC en trois triangles OBC, OCA, OAB, dont les aires sont respectivement égales à $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$. Donc on a, pour l'aire du triangle ABC,

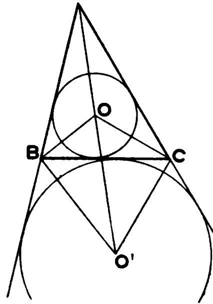


Fig. 262.

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)\,r,$$

ou

$$S = pr. \tag{8}$$

311. Soient O′ le centre et $r_a$ le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A. En menant O′A, O′B, O′C, on voit que le triangle ABC est égal à la somme des triangles O′CA, O′AB diminuée du triangle O′BC. Or les aires de ces trois triangles sont respectivement égales à $\frac{1}{2}br_a$, $\frac{1}{2}cr_a$, $\frac{1}{2}ar_a$ ; donc

$$S = \frac{1}{2}(b + c - a)\,r_a,$$

ou

$$S = (p - a)\,r_a. \tag{9}$$

On trouverait de même

$$S = (p - b)\,r_b \tag{10}$$

$$S = (p - c)\,r_c. \tag{11}$$

312. Si l'on multiplie membre à membre les formules (8), (9), (10) et (11), on obtient

$$S^4 = p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,r r_a r_b r_c = S^2\,r r_a r_b r_c,$$

ou

$$S = \sqrt{r r_a r_b r_c}. \qquad (12)$$

On peut exprimer $r$ en fonction de $r_a$, $r_b$, $r_c$. En effet, des formules (9), (10), (11) et (8), on tire

$$\frac{S}{r_a} + \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} = p - a + p - b + p - c$$
$$= 3p - 2p = p = \frac{S}{r};$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}; \qquad (13)$$

d'où on peut tirer $r$ et, par suite, S en fonction de $r_a$, $r_b$, $r_c$.

313. Des formules (10) et (11), on tire

$$\frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} = p - b + p - c = a.$$

Cette formule et les deux autres analogues permettent de calculer $a$, $b$, $c$ en fonction de $r_a$, $r_b$, $r_c$.

Enfin, en comparant les formules (8) et (3), (9) et (4), (10) et (5), (11) et (6), on obtient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$
$$\frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}, \text{ etc.}$$

314. **Théorème.** — *L'aire d'un trapèze est égale au produit de la hauteur par la demi-somme des bases, ou par la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

Soit (fig. 263) un trapèze ABCD. La diagonale BD le partage en deux triangles, ABD et BCD, ayant respectivement pour bases les bases AB et CD du trapèze et pour hauteur commune la distance DH de ces bases, qu'on appelle la *hauteur du trapèze*. Les aires de ces deux triangles sont respectivement égales à $\frac{1}{2}$ AB $\times$ DH et à $\frac{1}{2}$ CD $\times$ DH; donc, en désignant par S l'aire du trapèze, on a

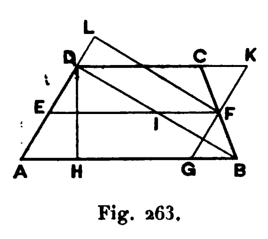


Fig. 263.

$$S = \frac{1}{2} (AB + CD)\, DH.$$

D'ailleurs, la droite EF qui joint les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases, car elle se compose de deux parties, EI et IF, qui sont respectivement les moitiés de AB et de CD. Donc

$$S = EF \times DH.$$

On arrive directement à cette formule en menant par F la parallèle à AD, qui rencontre AB en G et CD en K; les deux triangles FBG, FCK ainsi formés étant égaux, comme ayant un côté égal, FB = FC, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, l'aire du trapèze ABCD est égale à celle du parallélogramme AGKD et, par suite, a pour mesure EF $\times$ DH.

315. Remarque. — Pour évaluer l'aire du parallélogramme AGKD, on peut prendre pour base AD et pour hauteur la perpendiculaire FL abaissée de F sur AD. On obtient ainsi

$$S = AD \times FL.$$

Ainsi, ***l'aire d'un trapèze est égale au produit d'un des côtés non parallèles par sa distance au milieu de l'autre côté.***

### AIRE D'UN POLYGONE QUELCONQUE

316. Nous entendons ici par *polygone* la portion de plan limitée par une ligne brisée fermée *dont les côtés ne se croisent pas.*

Pour évaluer l'aire d'un polygone, il suffit de le décomposer en triangles, d'évaluer les aires de ces triangles et d'en faire la somme.

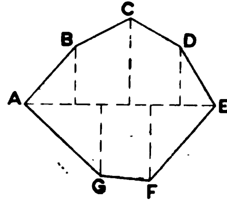


Fig. 264.

Pratiquement, étant donné un polygone ABCDEFG (fig. 264), on pourra mener la plus grande diagonale AE et projeter tous les sommets sur cette diagonale : le polygone se trouvera ainsi décomposé en triangles et en trapèzes rectangles, que l'on évaluera aisément.

317. PROBLÈME. — *Construire un triangle équivalent à un polygone donné* ABCDEF (fig. 265).

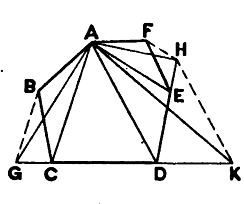


Fig. 265.

Menons la diagonale AC et, par le point B, menons la parallèle à cette diagonale, qui rencontre en G le côté CD prolongé. Le triangle AGC est équivalent au triangle ABC, comme ayant même base et même hauteur. Le polygone proposé est donc équivalent au polygone AGDEF, qui a un côté de moins. En opérant de la même manière sur ce dernier, on obtiendra un nouveau polygone équivalent au premier et ayant deux côtés de moins. En continuant ainsi, on arrivera à un triangle AGK équivalent au polygone proposé.

318. Problème. — *Construire un carré équivalent à un polygone donné.*

Supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver le côté $x$ d'un carré équivalent à un triangle de base $b$ et de hauteur $h$. On a alors

$$x^2 = \frac{1}{2} b \times h ;$$

donc $x$ est la moyenne proportionnelle entre $\frac{1}{2}b$ et $h$.

La même construction s'applique à un parallélogramme, à un trapèze et, en général, à tout polygone dont l'aire est le produit de deux longueurs.

S'il s'agit d'un polygone quelconque, on commencera par le transformer en un triangle équivalent et on appliquera à ce triangle la construction précédente.

## AIRE DU CERCLE

319. *Théorème. — L'aire d'un polygone régulier est égale à la moitié du produit de son périmètre par son apothème.*

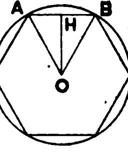


Fig. 266.

En effet, soient (fig. 266) AB un côté d'un polygone régulier de $n$ côtés et OH son apothème. L'aire du triangle AOB est égale à $\frac{1}{2}$ AB $\times$ OH ; donc l'aire du polygone, qui se compose de $n$ triangles égaux à AOB, est égale à $\frac{1}{2} n\text{AB} \times \text{OH}$, c'est-à-dire égale à la moitié du produit de son périmètre $n$AB par son apothème OH.

320. Définition. — On appelle *aire d'un cercle* la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier inscrit à

ce cercle, lorsque le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment. Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique.

En effet, soient $p$ le périmètre d'un polygone régulier inscrit à un cercle de rayon R et $a$ son apothème. L'aire du polygone est égale à $\frac{1}{2}pa$. Or, si le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment, $p$ a, par définition, pour limite la longueur C de la circonférence et l'apothème $a$ a pour la limite le rayon R. Donc l'aire du polygone a pour limite $\frac{1}{2}$ CR [1]. C'est cette limite qu'on appelle l'aire du cercle.

Ainsi, l'aire du cercle est égale à celle d'un triangle qui aurait pour base la longueur C de la circonférence et pour hauteur le rayon R. En la désignant par S, et en remplaçant C par $2\pi R$, on a

$$S = \frac{1}{2} 2\pi R \times R = \pi R^2.$$

321. Secteur circulaire. — On appelle *secteur circulaire* la portion de plan comprise entre un arc de cercle et les deux rayons qui aboutissent à ses extrémités.

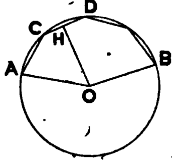


Fig. 267.

On appelle *aire d'un secteur circulaire* OAB (fig. 267) la limite vers laquelle tend l'aire d'un secteur polygonal OACD...B limité par les deux rayons OA, OB et par une brisée régulière inscrite à l'arc AB, lorsque le nombre des

---

[1] On peut s'en rendre compte en écrivant

$$CR - pa = (C - p)R + p(R - a) < (C - p)R + C(R - a);$$

or, quand le nombre des côtés augmente indéfiniment, $C - p$ tend vers zéro, par définition, et il en est de même de $R - a$, qui est moindre que la moitié du côté du polygone; donc $CR - pa$ tend aussi vers zéro.

côtés de cette brisée augmente indéfiniment. Soient $p$ le périmètre de cette brisée et $a$ son apothème ; on démontre, comme ci-dessus [319], que l'aire du secteur polygonal est égale à $\frac{1}{2} pa$. Lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, le périmètre $p$ a pour limite la longueur $l$ de l'arc AB, et l'apothème $a$ a pour limite le rayon R ; donc l'aire du secteur polygonal a pour limite $\frac{1}{2} l\text{R}$ : c'est cette limite qu'on appelle l'aire du secteur circulaire. En la désignant par S, on a

$$\text{S} = \frac{1}{2} l\text{R}.$$

Si l'arc AB contient $n$ degrés, $l = \frac{2\pi\text{R}n}{360}$ ; donc

$$\text{S} = \frac{\pi\text{R}^2 n}{360}.$$

322. L'aire du *segment* ABC [108] est la différence entre celle du secteur OACB et celle du triangle OAB (fig. 268). Abaissons la hauteur BD, qui est la moitié de la corde BE qui sous-tend l'arc double de AB ; l'aire du triangle OAB est égale à

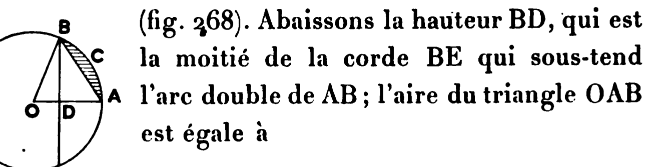


Fig. 268.

$$\frac{1}{2} \text{OA} \times \text{BD} = \frac{1}{4} \text{R} \times \text{BE}.$$

Donc l'aire du segment est égale à

$$\frac{1}{2} \text{arc AB} \times \text{R} - \frac{1}{4} \text{R} \times \text{BE}.$$

Si la corde BE est le côté d'un des polygones réguliers que nous avons étudiés, on pourra calculer, en fonction du rayon, la longueur de cette corde et, par suite, l'aire du segment. Sinon, il faut avoir recours à la trigonométrie.

En désignant par $\alpha$ l'angle AOB, on a $\text{BD} = \text{R} \sin \alpha$.

EXERCICES

1. Démontrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté $a$ est égale à $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ .— En effet, la hauteur est égale à $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ , etc.

2. L'aire du triangle [ex. 4, p. 57] ayant pour côtés les trois médianes d'un triangle donné est les trois quarts de l'aire de ce dernier. En déduire l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des trois médianes.

3. Construire un triangle connaissant :

1° Deux hauteurs et le rayon du cercle inscrit [313] ;

2° Le périmètre, l'aire et un côté ;

3° L'aire, un côté et le rayon du cercle circonscrit ;

4° L'aire ou le périmètre et deux des quatre rayons des cercles inscrit et exinscrits [310, etc.];

5° Trois des rayons des cercles inscrit et exinscrits ;

6° L'aire, un côté et un angle.

4. Trouver à l'intérieur d'un triangle un point tel que les droites qui le joignent aux trois sommets partagent le triangle en trois triangles équivalents.

5. Etant donnés trois points A, B, C, trouver un quatrième point M tel que les aires des triangles MBC, MCA, MAB soient proportionnelles à trois longueurs données.

6. Mener par le sommet A d'un triangle ABC une droite telle qu'en abaissant BD et CE perpendiculaires sur cette droite, l'aire du trapèze BCED soit égale à celle d'un carré donné. — L'aire de ce trapèze est égale au produit de BC par sa distance au milieu de DE; donc, etc.

7. Le rayon du cercle inscrit à un triangle rectangle est égal au demi-périmètre diminué de l'hypoténuse [93]. En déduire que l'aire d'un triangle rectangle est égale au produit des segments déterminés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

8. On prolonge, dans le même sens, les côtés d'un triangle d'une longueur égale à chacun de ces côtés jusqu'en M, N, P. Prouver que le triangle MNP vaut sept fois le triangle proposé.

9. Inscrire à un cercle donné un trapèze, connaissant l'aire et la hauteur ou un angle. — On considérera le triangle rectangle qui a pour côtés une diagonale, la demi-somme des bases et la hauteur.

Quel est le maximum de l'aire d'un trapèze de hauteur donnée, inscrit à un cercle donné ?

10. Inscrire à un cercle donné un trapèze dont on donne l'aire et les côtés non parallèles [315].

11. L'aire d'un polygone d'un nombre pair de côtés ne change pas quand tous les sommets de rang pair décrivent des vecteurs équipollents, ainsi que les sommets de rang impair.

— On supposera d'abord que les sommets de rang impair restent fixes et, en joignant tous les autres sommets à un point quelconque, on décomposera le polygone en quadrilatères. Il suffira de démontrer le théorème pour chacun de ces quadrilatères.

12. Deux polygones d'un nombre pair de côtés qui ont les mêmes points milieux sont équivalents.

— Ce théorème est un cas particulier du précédent; on peut le démontrer directement en remarquant que les droites qui joignent deux couples de points correspondants consécutifs sont égales, parallèles et de sens contraires.

13. Etant donnés deux polygones ABC... L, A'B'C'...L' intérieurs l'un à l'autre et ayant leurs côtés parallèles, on prolonge les côtés A'B', B'C',... dans un même sens; ils rencontrent BC, CD,... en M, N, P... Si on les prolonge en sens contraire, ils rencontrent LA, AB,... en M', N', P',... Prouver que les polygones MNP..., M'N'P' ... sont équivalents.

14. Evaluer l'aire d'un trapèze en le considérant comme la différence de deux triangles.

15. Calculer l'aire d'un trapèze en fonction des quatre côtés. — En menant par une extrémité d'un des côtés non parallèles la parallèle à l'autre, on forme un triangle dont on connaît les côtés, qui sont respectivement égaux aux côtés non parallèles et à la différence des bases du trapèze. On calculera la hauteur de ce triangle, qui est la même que celle du trapèze, etc.

16. Trouver l'aire d'un quadrilatère ABCD, connaissant les côtés *a, b, c, d* et les diagonales *m* et *n*.

— En projetant le point A en E sur la parallèle à BD menée par C, on aura d'abord

$$2\,\overline{\mathrm{BD}} \times \overline{\mathrm{CE}} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2.$$

Or l'aire du quadrilatère est $\frac{1}{2}$ BD $\times$ AE. On calcule AE dans le triangle rectangle ACE, en se servant de la relation précédente, etc. On trouve

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(2mn + a^2 - b^2 + c^2 - d^2)\,(2mn - a^2 + b^2 - c^2 + d^2)}.$$

En déduire la formule qui donne l'aire d'un quadrilatère inscriptible en fonction des côtés.

Si le quadrilatère ABCD se déforme, les sommets B et C restant fixes et les côtés restant constants, et que l'on mène par C une droite faisant avec BD un angle constant $\omega$ et rencontrant AE en F, le

triangle CEF reste semblable à lui-même ; donc $BD \times CF$ reste constant. Il en résulte que le point F décrit un cercle.

En déduire la construction d'un quadrilatère connaissant les quatre côtés et l'angle des diagonales, ou leur produit, ou l'aire du quadrilatère.

17, D'un point O pris à l'intérieur d'un polygone équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés ; la somme de ces perpendiculaires est indépendante de la position du point O.

18. L'aire du triangle équilatéral inscrit à un cercle de rayon R est $\frac{3}{4} R^2\sqrt{3}$; celle du carré, $2R^2$ ; celle du pentagone régulier, $\frac{5}{8} R^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, etc.

19. Etant données les aires A et B de deux polygones réguliers de $n$ côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un même cercle, calculer les aires A′ et B′ des deux polygones réguliers inscrit et circonscrit de $2n$ côtés.

On trouve, en faisant la même construction qu'au n° 276.

$$A' = \sqrt{A \times B} \quad \text{et} \quad B' = \frac{2BA'}{A' + B}.$$

20. Connaissant les aires de deux polygones réguliers de $n$ et de $2n$ côtés inscrits à un même cercle, trouver celle du polygone régulier inscrit de $4n$ côtés.

21. Si l'on prenait pour unité d'aire celle du triangle équilatéral dont le côté est égal à l'unité de longueur, ou celle du cercle de rayon égal à l'unité, quelle serait la mesure de l'aire d'un triangle quelconque, d'un carré, d'un cercle, etc. ?

22. Inscrire dans un triangle équilatéral trois cercles tangents entre eux et tangents chacun à deux côtés du triangle et évaluer l'aire comprise entre les trois cercles.

23. Etant donné un quadrant OAB, sur les rayons OA, OB comme diamètres on décrit deux demi-cercles, qui se coupent en un point C et qui partagent le quadrant en quatre parties ; évaluer les aires de ces quatre parties et démontrer que le point C est sur la droite AB.

24. Une couronne circulaire (différence de deux cercles concentriques) est équivalente au cercle qui a pour diamètre une corde du grand cercle tangente au petit.

25. Tous les polygones convexes isopérimètres circonscrits à un même cercle sont équivalents.

26. Prouver que $rr_a = (p - b)(p - c)$. En déduire S en fonction des côtés.

## CHAPITRE II

## COMPARAISON DES AIRES

323. ***Théorème.*** — *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle ; et réciproquement*

Soient ABC, ADE, deux triangles ayant l'angle A com-

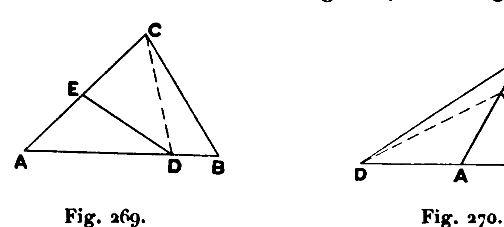



Fig. 269.

Fig. 270.

mun (fig. 269) ou les angles en A supplémentaires (fig. 270).

Traçons la droite CD ; les deux triangles ABC, ADC ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases AB, AD :

$$\frac{ABC}{ADC} = \frac{AB}{AD}.$$

De même, les triangles ACD, AED sont entre eux comme leurs bases AC, AE :

$$\frac{ADC}{AED} = \frac{AC}{AE}.$$

En multipliant membre à membre, il vient

$$\frac{ABC}{ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer la réciproque.

324. Corollaire. — *Deux triangles qui ont un angle égal ou supplémentaire, sont équivalents si les produits des côtés qui comprennent cet angle sont égaux dans les deux triangles.*

325. ***Théorème.*** — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au carré du rapport de deux côtés homologues.*

Considérons d'abord deux triangles semblables ABC,

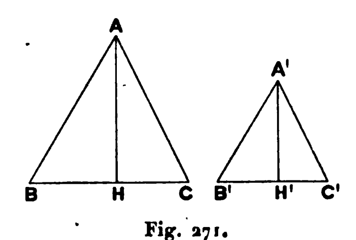



Fig. 271.

A'B'C' (fig. 271). Les angles B et B' étant égaux, on a, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{BA}{B'A'}.$$

Or $\frac{BA}{B'A'} = \frac{BC}{B'C'}$, puisque les triangles sont semblables. Donc

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2.$$

*Démonstration directe.* — Abaissons les hauteurs homologues AH, A'H'; on a

$$ABC = \frac{1}{2} BC \times AH \quad \text{et} \quad A'B'C' = \frac{1}{2} B'C' \times A'H';$$

d'où

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{BC}{B'C'} \times \frac{AH}{A'H'}.$$

Il suffit donc de prouver que $\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'}$. En effet, les triangles rectangles ABH, A'B'H' sont semblables, parce que les angles B et B' sont égaux ; par conséquent

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Mais $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, en vertu de la similitude des triangles ABC, A'B'C' ; donc

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Considérons maintenant deux polygones semblables P et P'. Nous savons [171, 3°] que, si on décompose le polygone P en triangles $T_1$, $T_2$, $T_3$,..., d'une façon quelconque, on pourra décomposer le polygone P' en triangles $T'_1$, $T'_2$, $T'_3$,... respectivement semblables aux précédents. Or, en désignant par $a$ et $a'$ deux côtés homologues des polygones P et P', nous venons de voir que

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = \dots = \frac{a^2}{a'^2};$$

par conséquent,

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \dots} = \frac{a^2}{a'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

### RELATION ENTRE LES CARRÉS CONSTRUITS SUR LES TROIS CÔTÉS D'UN TRIANGLE

326. Lemme. — *Si, dans un triangle* ABC (fig. 272), *on mène deux hauteurs* AD *et* BE, *le rectangle qui a pour dimensions* CB *et* CD *est équivalent au rectangle qui a pour dimensions* CA *et* CE.

Cela résulte de l'égalité

$$CB \times CD = CA \times CE,$$

qu'on obtient en considérant les triangles semblables CDA et CEB.

Mais nous voulons démontrer directement que les rectangles CDFG, CEHK qui ont pour bases CD, CE et pour hauteurs CG = CB, CK = CA sont équivalents. En effet, menons par G la parallèle à CA, qui rencontre AF en L ; puis par K la parallèle à CB, qui rencontre BH en N. Les rectangles CDFG, CEHK sont respectivement équivalents aux parallélogrammes CGLA, CBNK, comme ayant même base et même hauteur que ces parallélogrammes. Or ces parallélogrammes sont égaux, car on peut les faire coïncider en faisant tourner l'un d'eux de 90° autour du point C ; donc les deux rectangles sont équivalents.

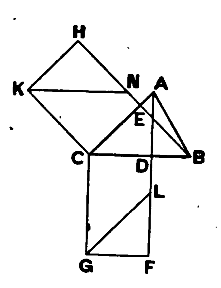


Fig. 272.

327. ***Théorème de Pythagore.*** — *Dans tout triangle rectangle* ABC (fig. 273), *le carré construit sur l'hypoténuse* BC *est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés* AB *et* AC.

Ce théorème résulte de la relation

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Pour le démontrer directement, il suffit de mener par le sommet de l'angle droit la perpendiculaire AKL sur l'hypoténuse BC : on partage ainsi le carré construit sur l'hypoténuse en deux rectangles BL, CL respectivement équivalents aux carrés construits sur AB et sur AC, en vertu du lemme précédent.

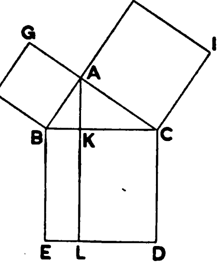


Fig. 273.

328. Corollaire. — Les rectangles BL, CL et le carré BCDE sont entre eux comme leurs bases BK, CK, BC ; donc *les carrés construits sur les côtés de l'angle droit et sur l'hypoténuse sont proportionnels aux projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse et à l'hypoténuse.*

329. **Théorème.** — *Dans tout triangle obtusangle, le carré construit sur le côté opposé à l'angle obtus est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés augmentée de deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces deux autres côtés et pour hauteur la projection de l'autre sur celui-là.*

Soit (fig. 274) ABC un triangle, dans lequel l'angle A est obtus et soit AF la projection de AC sur AB. Nous savons que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AF,$$

ce qui démontre le théorème.

Pour le démontrer directement, construisons les trois carrés sur BC, CA, AB et menons les trois hauteurs AD, BE, CF, qui rencontrent GH, KL, MN, en P, Q, R. D'après le lemme ci-dessus, les rectangles BP, CP sont respectivement équivalents aux rectangles BR, CQ. Donc le carré construit sur BC équivaut à la somme des deux rectangles BR, CQ, c'est-à-dire à la somme des carrés BM, CL construits sur AB et sur AC, augmentée de la somme des deux rectangles AQ et AR, qui sont équivalents en vertu du lemme ; ce qui démontre le théorème.

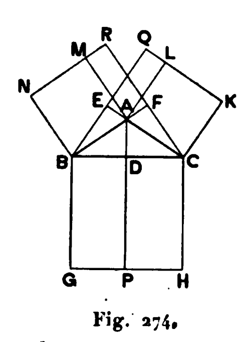


Fig. 274.

330. ***Théorème.*** — *Dans tout triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu est équivalent à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, diminuée de deux fois le rectangle ayant pour base l'un de ces deux côtés et pour hauteur la projection de l'autre sur celui-là.*

On peut encore déduire ce théorème de la relation numérique correspondante. Si on veut le démontrer directement, il faut distinguer deux cas, selon que le triangle a tous ses angles aigus ou non. Dans les deux cas, la démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

331. Problème. — *Etant donnés deux polygones semblables, construire un polygone semblable à ces deux-là et équivalent à leur somme ou à leur différence.*

Soient $a$, $b$, $x$, trois côtés homologues des polygones donnés A, B et du polygone inconnu X. En supposant $a > b$, on a

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{X}{x^2} = \frac{A + B}{a^2 + b^2} = \frac{A - B}{a^2 - b^2}.$$

Si donc on veut que $X = A + B$, il faudra que $x^2 = a^2 + b^2$, c'est-à-dire que $x$ sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit $a$ et $b$. Au contraire, si l'on veut que $X = A - B$, il faudra que $x^2 = a^2 - b^2$, et alors $x$ sera le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant $a$ pour hypoténuse et $b$ pour premier côté de l'angle droit.

332. Remarque. — Le raisonnement qu'on vient de faire prouve que, si l'on considère trois polygones semblables ayant pour côtés homologues l'hypoténuse et les

deux autres côtés d'un triangle rectangle, le premier de ces polygones équivaut à la somme des deux autres.

333. **Problème.** — *Etant donnés deux polygones* A *et* B, *construire un polygone* X *semblable au premier et équivalent au second.*

Soient $a$ et $x$, deux côtés homologues de A et de X ; on doit avoir

$$\frac{A}{X} = \frac{a^2}{x^2}, \quad \text{et} \quad X = B ;$$

donc

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Soient $\alpha$ et $\beta$, les côtés des carrés équivalents à A et à B ; la proportion précédente peut s'écrire

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{x}.$$

Donc $x$ est la quatrième proportionnelle aux trois longueurs $\alpha$, $\beta$, $a$.

334. **Problème.** — *Construire un polygone* X *semblable à un polygone donné* A *et dont l'aire soit à celle de ce polygone dans un rapport donné* $\frac{m}{n}$.

Soient $x$ et $a$ deux côtés homologues des polygones X et A. On doit avoir

$$\frac{X}{A} = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{X}{A} = \frac{m}{n};$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}.$$

Si le rapport donné $\frac{m}{n}$ est *numérique*, par exemple, égal à $\frac{3}{4}$, on aura

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{3}{4}, \text{ ou } x^2 = a \times \frac{3}{4} a;$$

$x$ est alors la moyenne géométrique des longueurs $a$ et $\frac{3}{4} a$.

Si $m$ et $n$ sont des longueurs, on écrira

$$x^2 = a \times \frac{am}{n};$$

on construira [162] une longueur $b$ égale à $\frac{am}{n}$ et $x$ sera encore la moyenne géométrique de deux longueurs $a$ et $b$.

On peut opérer autrement, en se rappelant que, dans un triangle rectangle, le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport de leurs projections sur l'hypoténuse. On prend, sur une droite (fig. 275), deux longueurs consécutives, BD $= m$, DC $= n$ ; sur BC comme diamètre, on décrit une demi-circonférence, qui rencontre la perpendiculaire à BC menée par D en un point A tel que

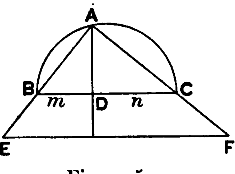


Fig. 275.

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{m}{n} = \frac{x^2}{a^2}.$$

D'où

$$\frac{x}{a} = \frac{AB}{AC}.$$

Par suite, si l'on prend sur AC une longueur AF égale à $a$ et que l'on mène par F la parallèle à BC, qui rencontre AB en E, la longueur AE sera égale à $x$.

## MÉTHODE DES AIRES

335. La comparaison des aires est une méthode féconde pour la recherche des *propriétés métriques*, c'est-à-dire des relations qui existent entre les nombres qui mesurent les longueurs des lignes d'une figure. Par exemple, nous savons que le rapport des aires de deux polygones est indépendant du procédé employé pour les comparer; si donc on évalue ce rapport de deux façons différentes, en égalant les deux expressions trouvées, on aura une relation entre les longueurs qui entrent dans ces expressions.

336. Ainsi, soit (fig. 276) AD la bissectrice de l'angle A du triangle ABC. Comparons les deux triangles ABD et ADC; si l'on prend BD et DC pour bases de ces deux triangles, ils ont même hauteur; donc



Fig. 276.

$$\frac{ABD}{ADC} = \frac{BD}{DC}.$$

D'autre part, si l'on prend AB et AC pour bases de ces deux triangles, ils ont encore même hauteur; car le point D, étant situé sur la bissectrice de l'angle A, est équidistant des deux côtés de cet angle; donc

$$\frac{ABD}{ADC} = \frac{AB}{AC}.$$

La comparaison de ces deux proportions donne

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

On retrouve ainsi le théorème du n° 156.

La démonstration précédente s'applique à la bissectrice extérieure.

337. Comme deuxième application, considérons les triangles OBC, OCA, OAB (fig. 277 et 278), obtenus en joignant les

trois sommets d'un triangle ABC à un point quelconque O du plan.

Les deux triangles OAB et OAC peuvent être considérés comme ayant même base OA; donc ils sont entre eux comme leurs hauteurs, ou, ce qui revient au même, comme les seg-

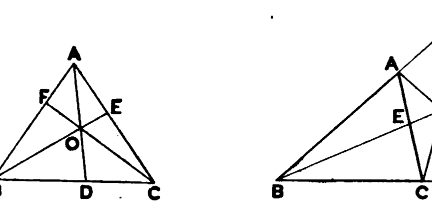



Fig. 277. Fig. 278.

ments DB et DC, déterminés par la droite OA sur le côté opposé BC. De plus, si nous désignons par (OAB) la mesure algébrique de l'aire du triangle OAB, c'est-à-dire le nombre qui mesure cette aire, précédé du signe + ou du signe —, selon qu'un observateur, parcourant le périmètre du triangle dans le sens OAB, a l'aire du triangle à sa gauche ou à sa droite, et si nous désignons, de même, par (OAC) la mesure algébrique de l'aire du triangle OAC, le rapport $\frac{(OAB)}{(OAC)}$ est négatif si les points B et C sont de part et d'autre de OA (fig. 277), positif dans le cas contraire (fig. 278). Mais il en est évidemment de même du rapport $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$; donc, dans tous les cas, ces deux rapports sont égaux :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{(OAB)}{(OAC)}.$$

De même, en appelant E et F les points de rencontre de OB avec CA et de OC avec AB, on a

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{(OBC)}{(OBA)}.$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{(OCA)}{(OCB)}.$$

En multipliant membre à membre ces trois égalités et en remarquant que

$$(OBC) = -(OCB), \quad (OCA) = -(OAC), \quad (OAB) = -(OBA),$$

il vient

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \times \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

Nous retrouvons ainsi le théorème de Céva [218].

338. On pourrait démontrer, par cette méthode, tous les théorèmes du troisième livre. C'est ce qu'on faisait autrefois; on avait même recours à la considération des aires pour démontrer qu'un triangle qui a deux angles égaux est isoscèle ([1]). Aujourd'hui, on est d'accord pour admettre que toutes les propriétés métriques fondamentales doivent être établies directement, et la méthode des aires est considérée surtout comme une méthode d'invention, pour la découverte de propriétés nouvelles.

EXERCICES

1. Par un point D pris sur la base BC d'un triangle ABC, mener deux droites rencontrant les deux autres côtés en E et F, de manière à partager le triangle ABC en trois parties proportionnelles à des longueurs données $m$, $n$, $p$.

— En menant par E et F des parallèles à AD rencontrant BC en G et H, on voit que ces trois parties sont équivalentes aux trois triangles ABG, AGH, AHC, par suite, proportionnelles à BG, GH, HC. Donc on est ramené à partager BC en parties proportionnelles à $m, n, p$.

2. Partager un trapèze ABCD (fig. 279), par des parallèles aux bases, en parties proportionnelles à des longueurs données $m, n, p$.

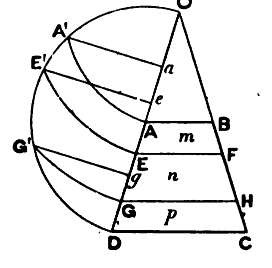



Fig. 279.

Soient EF, GH les deux parallèles cherchées. On a

$$\frac{ABFE}{m} = \frac{EFHG}{n} = \frac{GHCD}{p},$$

([1]) EUCLIDE, livre I, proposition 6.

ou, en appelant O le point de rencontre de AD et de BC,

$$\frac{OEF - OAB}{m} = \frac{OGH - OEF}{n} = \frac{ODC - OGH}{p}.$$

Or, les triangles OAB, OEF,.... étant semblables,

$$\frac{OAB}{\overline{OA}^2} = \frac{OEF}{\overline{OE}^2} = \frac{OGH}{\overline{OG}^2} = \frac{ODC}{\overline{OD}^2},$$

d'où

$$\frac{OEF - OAB}{\overline{OE}^2 - \overline{OA}^2} = \frac{OGH - OEF}{\overline{OG}^2 - \overline{OE}^2} = \frac{ODC - OGH}{\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\overline{OE}^2 - \overline{OA}^2}{m} = \frac{\overline{OG}^2 - \overline{OE}^2}{n} = \frac{\overline{OD}^2 - \overline{OG}^2}{p}. \qquad (1)$$

Sur OD comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, et, de O comme centre, avec OA, OE, OG pour rayons, décrivons des arcs de cercles, qui coupent cette demi-circonférence en A', E', G'; puis projetons A', E', G' sur OD en $a$, $e$, $g$. On a

$$\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = OD \times Oa,$$
$$\overline{OE}^2 = \overline{OE'}^2 = OD \times Oe,$$
$$\overline{OG}^2 = \overline{OG'}^2 = OD \times Og.$$

En substituant dans (1) et divisant par OD, il vient

$$\frac{Oe - Oa}{m} = \frac{Og - Oe}{n} = \frac{OD - Og}{p},$$

ou

$$\frac{ae}{m} = \frac{eg}{n} = \frac{gD}{p}.$$

Donc on est ramené à partager $a$D en parties proportionnelles à $m$, $n$, $p$, etc.

On procède de même pour partager un triangle en parties proportionnelles à des longueurs données par des parallèles à la base.

3. Inscrire à un triangle un rectangle d'aire donnée.

4. Inscrire à un triangle un parallélogramme d'aire donnée, ayant avec ce triangle un angle commun.

5. Inscrire à un carré un rectangle d'aire donnée.

6. Inscrire à un carré le plus petit carré possible.

7. Sur la figure du n° 329, on joint les sommets des carrés de

manière à former un hexagone GHKLMN. Evaluer l'aire de cet hexagone et la somme des carrés de ses côtés.

8. Partager un triangle en deux parties équivalentes par une perpendiculaire à la base.

9. Partager un triangle en moyenne et extrême raison par une parallèle ou une perpendiculaire à la base.

10. Construire un triangle connaissant l'aire et les angles. — On commencera par construire un triangle semblable au triangle demandé.

11. Si deux polygones sont homothétiques et intérieurs, l'aire d'un polygone inscrit à l'un et circonscrit à l'autre, est moyenne proportionnelle entre les aires des deux premiers.

— On partagera les trois polygones en triangles en joignant leurs sommets au centre d'homothétie des deux premiers, etc.

12. Parmi tous les triangles qui ont deux côtés donnés, celui dont l'aire est maxima est celui dans lequel ces côtés sont perpendiculaires.

13. Parmi tous les triangles de même base et de même aire, le triangle isoscèle est celui qui a le plus petit périmètre.

— Car les sommets de ces triangles sont sur une parallèle à la base, etc.

14. Parmi tous les triangles isopérimètres de même base, le triangle isoscèle est maximum.

— On peut démontrer ce théorème directement, ou bien le déduire du précédent, au moyen du principe suivant, que le lecteur démontrera sans peine :

Si deux quantités variables $u$ et $v$ dépendent l'une de l'autre, de telle sorte que $u$ ait pour minimum $u'$ quand $v$ a la valeur $v'$, réciproquement, lorsque $u = u'$, $v$ a pour maximum $v'$, pourvu que le minimum de $u$ augmente avec la valeur $v'$.

15. Parmi tous les triangles isopérimètres, le triangle équilatéral est maximum.

16. De tous les triangles ayant un angle donné, compris entre deux côtés dont la somme est donnée, le triangle isoscèle est maximum et sa base minimum.

17. De tous les triangles ayant un angle et un périmètre donné, le triangle isoscèle est maximum et sa base minimum.

— On considérera le cercle inscrit et le cercle exinscrit dans l'angle donné, en remarquant que la distance des points de contact de ces deux cercles avec l'un des côtés de l'angle est égale au troisième côté.

18. Dans un triangle ABC, le côté AC est la moitié du côté AB ; on mène la bissectrice AD de l'angle A et la bissectrice exté-

rieure AE. Prouver que les aires des triangles ADC, ADB, ABC, ADE sont proportionnelles aux nombres 1, 2, 3, 4.

19. Par un point intérieur à un triangle, on mène des parallèles aux côtés ; ces droites partagent le triangle en trois parallélogrammes et trois triangles. Prouver que le produit des aires des parallélogrammes vaut huit fois le produit des aires des triangles.

20. Soit O un point pris dans le plan d'un triangle ABC ; on mène les droites OA, OB, OC, qui rencontrent BC, CA, AB en A', B', C'. Démontrer que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{OB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{OC'}}{\overline{CC'}} = 1.$$

— On évaluera le rapport de l'aire de chacun des triangles OBC, OCA, OAB à celle du triangle ABC et on écrira que la somme de ces trois rapports est égale à l'unité.

21. Si par un point O pris sur la bissectrice d'un angle BAC, on mène différentes sécantes terminées aux côtés de l'angle, la plus petite est celle qui est perpendiculaire à la bissectrice.

— Soit DE la sécante perpendiculaire à OA et soit FG une autre sécante. Si H est le point de rencontre de FG avec la parallèle à AE menée par D, on voit que le triangle DOH est égal à EOG. Donc le triangle ADE est plus petit que AFG ; or la hauteur AO du premier est plus grande que celle du second, donc sa base est plus petite.

22. Si on désigne par $x$, $y$, $z$ les distances d'un point M, pris à l'intérieur d'un triangle, aux trois côtés $a$, $b$, $c$, on a

$$ax + by + cz = 2S.$$

Etendre la formule à toutes les positions de M dans le plan en donnant des signes à $x$, $y$, $z$.

## NOTE I

## SUR LA MESURE DES GRANDEURS

339. Considérons un système de grandeurs de même espèce, c'est-à-dire un ensemble d'êtres dont on a défini l'*égalité* et l'*addition*[1]; on entend par là que l'on a indiqué dans quel cas deux de ces êtres doivent être considérés comme *égaux*, et que l'on a fait connaître un procédé au moyen duquel, étant donnés deux quelconques de ces êtres, A et B, on peut en trouver un troisième C que l'on appellera la *somme* de A et de B et que l'on représentera par $A + B$.

Pour exprimer qu'une grandeur A est égale à une grandeur B, on écrit $A = B$.

On dit qu'une grandeur A est plus grande qu'une grandeur B, ou que B est plus petite que A, lorsqu'on peut trouver une troisième grandeur C du système, telle que $A = B + C$, et on exprime ce fait en écrivant

$$A > B \quad \text{ou } B < A.$$

340. Nous supposerons que les définitions que l'on a données de l'égalité et de l'addition satisfassent aux conditions suivantes.

I. — *L'égalité doit être réflexe, symétrique, transitive :*

*Réflexe*, c'est-à-dire que A doit être égal à A, en vertu de la définition;

*Symétrique*, c'est-à-dire que, si $A = B$, il en résulte que $B = A$;

---

(1) Nous laissons de côté les systèmes de grandeurs, comme la température, dont on définit seulement l'*égalité* et l'*inégalité*, mais non l'addition.

*Transitive*, c'est-à-dire que, si $A = B$ et $B = C$, il en résulte que $A = C$.

II. — *L'addition doit être univoque, commutative et associative.*

*Univoque*, c'est-à-dire d'abord que la grandeur désignée par $A + B$ doit être unique, ou que, s'il y en a plusieurs, elles doivent être égales entre elles ; ensuite, si $A = A'$ et $B = B'$, il faut que

$$A + B = A' + B = A + B' = A' + B';$$

*Commutative*, c'est-à-dire que $A + B = B + A$ ;

*Associative*, c'est-à-dire que $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Par conséquent, on peut, sans altérer la somme de plusieurs grandeurs du système, intervertir l'ordre des termes, et remplacer plusieurs termes par leur somme.

III. — *Entre deux grandeurs quelconques*, A *et* B, *du système, il doit y avoir une des trois relations*

$$A = B, \quad A > B, \quad \text{ou} \quad A < B;$$

*et chacune de ces relations doit être incompatible avec chacune des deux autres.*

COROLLAIRES

1° Si $A = B$ et $B > C$, il en résulte $A > C$.

Car on peut trouver une grandeur D telle que

$$C + D = B = A.$$

2° Si $A > B$ et $B > C$, il en résulte $A > C$.

Car on peut trouver des grandeurs D et E telles que

$$A = B + D, \quad B = C + E;$$

par suite,

$$A = (C + E) + D = C + (E + D) > C.$$

3° Si $A > B$, il en résulte $A + C > B + C$.

Car on peut trouver une grandeur D telle que $A = B + D$ ; donc

$$A + C = (B + D) + C = (B + C) + D > B + C.$$

*Réciproquement* [19], si $A + C > B + C$, il en résulte $A > B$; et si $A + C = B + C$, il en résulte $A = B$.

341. On sait que, si $A > B$, il existe une grandeur C telle que $B + C = A$. D'ailleurs, si C' est une autre grandeur telle que $B + C' = A$, on en conclut que

$$B + C' = B + C, \text{ d'où } C' = C.$$

Donc toutes les grandeurs X du système qui vérifient l'équation $B + X = A$ sont égales entre elles; on désigne l'une quelconque d'entre elles par $A - B$.

342. Définition. — On appelle *produit d'une grandeur* A *par un nombre entier n*, et on représente par $A.n$ ou par $nA$ (¹), la somme de $n$ grandeurs égales à A.

De cette définition résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° Si $A = B$, $A.n = B.n$; et si $A > B$, $A.n > B.n$,

Et réciproquement [19].

2° $(A + B).n = A.n + B.n$.

3° $m$ et $n$ étant des entiers quelconques, on a

$$A.(m + n) = A.m + A.n.$$
$$(A.m).n = A.(mn) = (A.n).m.$$

343. Nous admettons que, étant donnés une grandeur quelconque A du système et un entier quelconque $n$, on peut trouver une autre grandeur X du système, telle que :

$$X.n = A.$$

D'ailleurs, si X' est une autre grandeur telle que :

$$X'.n = A = X.n,$$

il en résulte que $X' = X$. Donc toutes les grandeurs X qui vérifient l'équation $X.n = A$ sont égales entre elles : l'une

(¹) Dans cette note, nous emploierons exclusivement la première de ces deux notations.

quelconque d'entre elles s'appelle la $n^e$ partie de A et se représente par $A.\frac{1}{n}$ ou par $\frac{1}{n}A$.

Quand on ne veut pas préciser combien de fois X est contenu dans A, on se contente de dire que X est une *partie aliquote* de A, ou que A est un *multiple* de X.

344. Définition. — On appelle *produit d'une grandeur* A *par une fraction* $\frac{m}{n}$, et on représente par $A.\frac{m}{n}$ ou par $\frac{m}{n}A$ la somme de $m$ grandeurs égales chacunes à la $n^e$ partie de A.

Soient $a, b, c, \ldots,$ des nombres *rationnels*, c'est-à-dire entiers ou fractionnaires ; nous désignerons par $A.a.b.c\ldots$, la grandeur obtenue en multipliant la grandeur A par $a$, puis le résultat obtenu par $b$, etc.

De ces définitions, résultent les conséquences suivantes :

1° $A.\frac{m}{n} = A.m.\frac{1}{n}$, c'est-à-dire que $A.\frac{m}{n}$ est la $n^e$ partie de $A.m$.

En effet,

$$\left(A.\frac{m}{n}\right).n = A.\frac{1}{n}.m.n = A.\frac{1}{n}.n.m = A.m.$$

2° $A.\frac{m}{n} = A.\frac{mp}{np}$.

En effet,

$$\left(A.\frac{m}{n}\right).(np) = A.m.\frac{1}{n}.n.p. = A.(mp).$$

Corollaires. — Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire si $mq = np$, il en résulte $A.\frac{m}{n} = A.\frac{p}{q}$ ; car

$$A.\frac{m}{n} = A.\frac{mq}{nq} = A.\frac{np}{nq} = A.\frac{p}{q}.$$

De même, si $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, c'est-à-dire si $mq > np$, il en résulte $A.\frac{m}{n} > A.\frac{p}{q}$.

*Réciproquement* [19], si $A.\frac{m}{n} = A.\frac{p}{q}$, il en résulte $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, et si $A.\frac{m}{n} > A.\frac{p}{q}$, il en résulte $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$,

3° $(A + B).\frac{m}{n} = A.\frac{m}{n} + B.\frac{m}{n}$.

En effet,

$$\left(A.\frac{m}{n} + B.\frac{m}{n}\right).n = A.\frac{m}{n}.n + B\frac{m}{n}.n = (A + B).m.$$

Corollaire. — Si $A > B$, il en résulte $A.\frac{m}{n} > B.\frac{m}{n}$ ; car on peut trouver une grandeur C telle que $A = B + C$, etc.

*Réciproquement,* si $A.\frac{m}{n} > B.\frac{m}{n}$, il en résulte $A > B$ [19].

4° $A.\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{n}\right) = A.\frac{m}{n} + A.\frac{p}{n}$.

En effet,

$$A.\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{n}\right) = A.\left(\frac{m + p}{n}\right) = A.\frac{1}{n}.(m + p)$$

$$= A.\frac{1}{n}.m + A.\frac{1}{n}.p = A.\frac{m}{n} + A.\frac{p}{n}.$$

5° $A.\frac{m}{n}.\frac{p}{q} = A.\frac{mp}{nq}$.

En effet

$$A.\frac{m}{n}.\frac{p}{q} = A.\frac{mp}{np}\,\frac{np}{nq} = A.mp.\frac{1}{np}.np.\frac{1}{nq}$$

$$= A.mp.\frac{1}{nq} = A.\frac{mp}{nq}.$$

345. Axiome d'Archimède [1]. — Soient A et B deux grandeurs quelconques du système ; nous admettrons qu'on peut trouver un entier $n$ tel que $A.n > B$ ou, ce qui revient au même, $B.\frac{1}{n} < A$.

---

[1] Euclide avait déjà énoncé cet axiome sous forme de définition en disant : Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν (V. déf. 4).

## NOTIONS SUR LES LIMITES

346. Considérons une suite illimitée de grandeurs

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

et soit L une grandeur déterminée. On dit que $A_n$ *a pour limite* L *lorsque n augmente indéfiniment,* si, à toute grandeur G du système, on peut faire correspondre un entier $\nu$, tel que, pour $n > \nu$, la différence entre $A_n$ et L soit moindre que G.

Il est essentiel de remarquer que $A_n$ ne peut avoir deux limites différentes. En effet, soit M une grandeur différente de L et désignons par 2G la différence entre L et M; pour $n > \nu$, la différence entre $A_n$ et L étant moindre que G, la différence entre $A_n$ et M sera plus grande que G; donc $A_n$ ne peut pas avoir M pour limite.

347. Axiome I. — *Si la grandeur* $A_n$ *croît avec n, mais reste toujours inférieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite* L.

D'ailleurs cette limite est :

1° *Supérieure à toutes les grandeurs* $A_n$ ; car si on avait $L \leq A_p$, la différence $A_n$ — L serait supérieure à la grandeur *déterminée* $A_{p+1} - A_p$, pour toutes les valeurs de $n$ plus grandes que $p + 1$.

2° *Inférieure ou au plus égale à* B; car, autrement, la différence $L - A_n$ serait supérieure à la grandeur déterminée $L - B$ et, par conséquent, ne pourrait pas devenir moindre que toute grandeur donnée d'avance.

348. Axiome II. — *Si la grandeur* $A_n$ *décroît quand n augmente, mais reste toujours supérieure à une grandeur déterminée* B, *nous admettons qu'elle tend vers une certaine limite.*

On voit, comme ci-dessus, que cette limite est : 1° inférieure à toutes les grandeurs $A_n$; 2° supérieure ou au moins égale à B.

### ÉGALITÉ, SOMME, PRODUIT DE NOMBRES IRRATIONNELS

351. Soit $\beta$ un deuxième nombre irrationnel défini par les deux suites illimitées

$$\left.\begin{array}{l} b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \\ b'_1, b'_2, b'_3, \ldots, b'_n, \ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

de nombres rationnels vérifiant les conditions

$$b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_n < b'_n < \ldots < b'_3 < b'_2 < b'_1,$$
$$\lim_{n=\infty} . (b'_n - b_n) = 0.$$

1° On convient de dire que $\alpha = \beta$, si l'on a, quel que soit $n$,

$$a_n < b'_n \quad \text{et} \quad b_n < a'_n.$$

Dans ces conditions, il est aisé de montrer que $A.\alpha = A.\beta$. Pour cela, il suffit de faire voir que l'on a, quel que soit $n$,

$$A.a_n < A.\beta < A.a'_n.$$

En effet, si l'on avait $A.\beta \leqq A.a_p$, on en déduirait

$$A.b_n < A.\beta \leqq A.a_p < A.a_{p+1} < A.b'_n ;$$

la différence $b'_n - b_n$ serait, quel que soit $n$, supérieure au nombre fixe $a_{p+1} - a_p$, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc $A.\beta > A.a_n$, quel que soit $n$ ; on démontrerait de même que $A.\beta < A.a'_n$.

2° $\alpha$ et $\beta$ étant deux nombres irrationnels définis par les suites (1) et (2), pour définir la somme $\alpha + \beta$, on considère les deux suites :

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots \\ a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2, \ldots\ldots, a'_n + b'_n, \ldots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Si l'on pose, pour un instant,

$$a_n + b_n = c_n, \quad a'_n + b'_n = c'_n,$$

on a

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_n < c'_n < \ldots < c'_2 < c'_1 ;$$

et la différence,

$$c'_n - c_n = (a'_n - a_n) + (b'_n - b_n),$$

tend vers zéro, lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Dès lors, s'il existe un nombre rationnel supérieur à tous les $a_n + b_n$ et inférieur à tous les $a'_n + b'_n$, c'est ce nombre qu'on représente par $\alpha + \beta$.

Dans le cas contraire, ce qu'on appelle $\alpha + \beta$, c'est le nombre *irrationnel* défini par les suites (3).

Dans les deux cas, on a pour toutes les valeurs de $n$,

$$\text{A}.(a_n + b_n) < \text{A}.(\alpha + \beta) < \text{A}.(a'_n + b'_n).$$

Mais, par définition, on a aussi

$$\text{A}.a_n < \text{A}.\alpha < \text{A}.a'_u, \quad \text{A}.b_n < \text{A}.\beta < \text{A}.b'_n;$$

d'où

$$\text{A}.(a_n + b_n) < \text{A}.\alpha + \text{A}.\beta < \text{A}.(a'_n + b'_n).$$

Comme il ne peut y avoir [349] qu'une seule grandeur supérieure à toutes les grandeurs $\text{A}.(a_n + b_n)$ et inférieure à toutes les grandeurs $\text{A}.(a'_n + b'_n)$, on en conclut que

$$\text{A}.(\alpha + \beta) = \text{A}.\alpha + \text{A}.\beta.$$

Remarque. — Si les deux nombres $\alpha$, $\beta$ sont, le premier rationnel, le second irrationnel et défini par les suites (2), ce qu'on appelle $\alpha + \beta$, c'est le nombre irrationnel défini par les deux suites

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + b_1, \ \alpha + b_2, \ldots, \alpha + b_n, \ldots \\ \alpha + b'_1, \ \alpha + b'_2, \ldots, \alpha + b'_n, \ldots \end{array}\right\}$$

et on démontre, comme ci-dessus, que

$$\text{A}.(\alpha + \beta) = \text{A}.\alpha + \text{A}.\beta.$$

Corollaire. — Si $\alpha > \beta$, on à $\text{A}.\alpha > \text{A}.\beta$; car on peut trouver un nombre $\gamma$ tel que $\alpha = \beta + \gamma$; donc

$$\text{A}.\alpha = \text{A}.(\beta + \gamma) = \text{A}.\beta + \text{A}.\gamma > \text{A}.\beta.$$

*Réciproquement* [19], si $A.\alpha > A.\beta$, il en résulte $\alpha > \beta$; et si $A.\alpha = A.\beta$, il en résulte $\alpha = \beta$.

3° $\alpha$ et $\beta$ étant deux nombres irrationnels définis par les suites (1) et (2), pour définir le *produit* $\alpha\beta$, on considère les deux suites

$$\left.\begin{matrix} a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots \\ a'_1b'_1, a'_2b'_2, \ldots, a'_nb'_n, \ldots \end{matrix}\right\} \quad (4)$$

On a d'abord

$$a_1b_1 < a_2b_2 < \ldots < a_nb_n < a'_nb'_n < \ldots < a'_2b'_2 < a'_1b'_1;$$

de plus, on démontre (voir *Cours d'Algèbre*, p. 9) que la différence $a'_nb'_n - a_nb_n$ tend vers zéro, lorsque $n$ augmente indéfiniment.

Dès lors, s'il existe un nombre rationnel supérieur à tous les $a_nb_n$, et inférieur à tous les $a'_n b'_n$, c'est ce nombre qu'on représente par $\alpha\beta$.

Dans le cas contraire, ce qu'on appelle $\alpha\beta$, c'est le nombre *irrationnel* défini par les suites (4) ([1]).

Dans les deux cas, on a, pour toutes les valeurs de $n$,

$$A.(a_nb_n) < A.(\alpha\beta) < A.(a'_nb'_n).$$

Mais, par définition, on a aussi

$$A.a_n < A.\alpha < A.a'_n,$$
$$(A.\alpha).b_n < (A.\alpha).\beta < (A.\alpha).b'_n;$$

d'où

$$(A.a_n).b_n < (A.\alpha).\beta < (A.a'_n).b'_n,$$

ou

$$A.(a_nb_n) < (A.\alpha).\beta < A.(a'_nb'_n).$$

Comme il ne peut y avoir [349] qu'une seule grandeur supérieure à toutes les grandeurs $A.(a_nb_n)$ et inférieure à toutes les grandeurs $A.(a'_nb'_n)$, on en conclut que

$$(A.\alpha)\,\beta = A.(\alpha\beta).$$

---

([1]) Il résulte de cette définition que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Remarque. — Si les deux nombres $\alpha$, $\beta$, sont, le premier rationnel, le second irrationnel et défini par les suites (2), ce qu'on appelle $\alpha\beta$, c'est le nombre irrationnel défini par les deux suites

$$\alpha b_1, \alpha b_2, \ldots, \alpha b_n, \ldots,$$
$$\alpha b'_1, \alpha b'_2, \ldots, \alpha b'_n, \ldots,$$

On définit de même le produit $\beta\alpha$ ; on en conclut que $\alpha\beta = \beta\alpha$, et on démontre comme ci-dessus que

$$(A.\alpha).\beta = A.(\alpha\beta) = (A.\beta).\alpha.$$

352. Soient A et B deux grandeurs du système, et $\alpha$ un nombre irrationnel; on démontre, comme ci-dessus, que

$$(A + B).\alpha = A.\alpha + B.\alpha.$$

Il en résulte que si $A > B$, on a $A.\alpha > B.\alpha$; car on peut trouver une grandeur C telle que $A = B + C$, etc.

*Réciproquement* [19], si $A.\alpha > B.\alpha$, il en résulte $A > B$ ; et si $A.\alpha = B.\alpha$, il en résulte $A = B$.

353. Résumé. — Soient A, B deux grandeurs du système et $\alpha$, $\beta$ deux nombres quelconques, rationnels ou irrationnels :

I. Si $A = B$, on a $A.\alpha = B.\alpha$; et réciproquement.
II. Si $A > B$, on a $A.\alpha > B.\alpha$ ; et réciproquement.
III. Si $\alpha = \beta$, on a $A.\alpha = A.\beta$; et réciproquement.
IV. Si $\alpha > \beta$, on a $A.\alpha > A.\beta$ ; et réciproquement.
V. $(A + B).\alpha = A.\alpha + B.\alpha$.
VI. $A.(\alpha + \beta) = A.\alpha + A.\beta$.
VII. $(A.\alpha).\beta = A.(\alpha\beta)$.

## Rapport de deux grandeurs. — Mesure des grandeurs

354. Soient A et B deux grandeurs de même espèce; on appelle *rapport de* A *à* B, ou *mesure de* A *quand on prend* B *pour unité,* le nombre par lequel il faut multiplier B pour reproduire A, c'est-à-dire le nombre $x$ défini par l'équation :

$$B.x = A.$$

Il est évident qu'il ne peut y avoir plus d'un nombre vérifiant cette équation; car, si $x$ et $y$ sont deux nombres inégaux, les grandeurs $B.x$ et $B.y$ sont inégales. Reste à prouver qu'il y en a un.

D'abord, si A est multiple de B :

$$A = B.m,$$

$m$ est le nombre cherché.

Ensuite, si A est multiple d'une certaine partie aliquote de B :

$$A = B.\frac{p}{q},$$

$\frac{p}{q}$ est le nombre cherché.

Enfin, supposons que A ne soit multiple ni de B, ni d'aucune partie aliquote de B. En vertu de l'axiome d'Archimède, nous pourrons trouver un entier $q_1$ tel que $B.\frac{1}{q_1} < A$; soit $B.\frac{p_1}{q_1}$ le plus grand multiple de $B.\frac{1}{q_1}$ contenu dans A :

$$B.\frac{p_1}{q_1} < A < B.\frac{p_1+1}{q_1}.$$

Soit $q_2$ le plus petit nombre entier tel que $B.\frac{1}{q_2}$ soit moindre que chacune des deux différences

$$A - B.\frac{p_1}{q_1}, \qquad B.\frac{p_1+1}{q_1} - A,$$

et, par suite, moindre que $B.\frac{1}{q_1}$, ce qui exige que $q_2 > q_1$; et soit $B.\frac{p_2}{q_2}$ le plus grand multiple de $B.\frac{1}{q_2}$ contenu dans A :

$$B.\frac{p_2}{q_2} < A < B.\frac{p_2+1}{q_2}.$$

Comme

$$A - B.\frac{p_2}{q_2} < B.\frac{1}{q_2} < A - B.\frac{p_1}{q_1},$$

il faut que

$$\frac{p_2}{q_2} > \frac{p_1}{q_1};$$

et, de même,

$$\frac{p_2+1}{q_2} < \frac{p_1+1}{q_1}.$$

En continuant ainsi, on obtient deux suites déterminées [1] de nombres rationnels :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2}, \ldots, \dfrac{p_n}{q_n}, \ldots \\ \dfrac{p_1+1}{q_1}, \dfrac{p_2+1}{q_2}, \ldots, \dfrac{p_n+1}{q_n}, \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

les premiers croissants, les seconds décroissants, et tels que

$$B.\frac{p_n}{q_n} < A < B.\frac{p_n+1}{q_n}. \quad (2)$$

De plus, la différence, $\frac{p_n+1}{q_n} - \frac{p_n}{q_n}$ ou $\frac{1}{q_n}$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment, puisque le nombre *entier* $q_n$ augmente avec $n$. Il en résulte [349] que A est la seule grandeur supérieure à toutes les grandeurs $B.\frac{p_n}{q_n}$ et inférieure à toutes les grandeurs $B.\frac{p_n+1}{q_n}$.

Si donc il y avait un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant, quel que soit $n$, les inégalités

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p}{q} < \frac{p_n+1}{q_n},$$

ou

$$B.\frac{p_n}{q_n} < B.\frac{p}{q} < B.\frac{p_n+1}{q_n},$$

on aurait $A = B.\frac{p}{q}$, de sorte que A serait multiple d'une partie aliquote de B, ce qui est contre l'hypothèse.

Il faut en conclure que les suites (1) définissent un nombre *irrationnel* $\alpha$, et que

$$B.\alpha = A;$$

---

[1] $q_1$ est un entier arbitraire satisfaisant à la condition $B.\frac{1}{q_1} < A$; mais, $q_1$ une fois choisi, $q_2, q_3, \ldots, q_n, \ldots$, sont déterminés.

car, par définition, $B.\alpha$ est la grandeur supérieure à toutes les grandeurs $B.\frac{p_n}{q_n}$ et inférieure à toutes les grandeurs $B.\frac{p_n+1}{q_n}$. Donc $\alpha$ est le nombre cherché.

355. Remarque. — Soient $A'$ et $B'$ deux autres grandeurs de même espèce, appartenant ou non au même système que $A$ et $B$. *Si, quelle que soit la fraction $f$, les différences*

$$A - B.f, \quad A' - B'.f,$$

*sont de même signe*, c'est-à-dire si $A'$ est supérieur ou inférieur à $B'.f$, selon que $A$ est lui-même supérieur ou inférieur à $B.f$, *le rapport de $A'$ à $B'$ est le même que celui de $A$ à $B$.*

En effet, dans ces conditions, les inégalités (2) entraînent

$$B'.\frac{p_n}{q_n} < A' < B'.\frac{p_n+1}{q_n},$$

quel que soit $n$ Donc le rapport de $A'$ à $B'$ est défini, lui aussi, par les suites (1).

356. ***Théorème fondamental.*** — *Le rapport de deux grandeurs est égal au quotient des nombres qui les mesurent, quand on prend pour unité une troisième grandeur de même espèce.*

Soient $A$, $B$, $C$, trois grandeurs de même espèce; $\lambda$ le rapport de $A$ à $B$; $\alpha$ et $\beta$ les nombres qui mesurent $A$ et $B$ quand on prend $C$ pour unité. On a

$$A = B.\lambda, \qquad B = C.\beta;$$

d'où

$$A = (C.\beta).\lambda = C.(\beta\lambda).$$

Donc $\beta\lambda$ est le nombre $\alpha$ qui mesure $A$, quand on prend $C$ pour unité :

$$\beta\lambda = \alpha, \text{ d'où } \lambda = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (1$$

357. De même qu'on désigne par $\frac{\alpha}{\beta}$ le quotient des *nombres*

$\alpha$ et $\beta$, par analogie, nous représenterons désormais le rapport de deux grandeurs A et B par la notation $\frac{A}{B}$ ; de sorte qu'on a, par définition,

$$B \times \frac{A}{B} = A.$$

En adoptant cette notation, on voit d'abord que, pour évaluer le rapport $\frac{A}{B}$ de deux grandeurs, il suffit de remplacer, dans l'expression $\frac{A}{B}$, les grandeurs A et B par les nombres $\alpha$ et $\beta$ qui les mesurent en fonction d'une même unité C.

Ensuite, les égalités (1) peuvent s'écrire

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{\left(\frac{A}{C}\right)}{\left(\frac{B}{C}\right)}. \tag{2}$$

En particulier, si on fait C = A, il vient

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\left(\frac{B}{A}\right)}.$$

En remplaçant, dans (2), A par $B.\lambda$, on a

$$\frac{B.\lambda}{C} = \frac{B}{C} \times \lambda. \tag{3}$$

Enfin, on a

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}, \tag{4}$$

car [353, VI]

$$C.\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C}\right) = C \times \frac{A}{C} + C \times \frac{B}{C} = A + B.$$

358. Si, dans l'égalité (4), on remplace A par $A.\lambda$ et B par $B.\mu$, $\lambda$ et $\mu$ désignant des nombres quelconques, il vient,

$$\frac{A.\lambda + B.\mu}{C} = \frac{A.\lambda}{C} + \frac{B.\mu}{C} = \frac{A}{C} \times \lambda + \frac{B}{C} \times \mu.$$

Or $\frac{A.\lambda + B.\mu}{C}$, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ sont les nombres qui mesurent les grandeurs $A.\lambda + B.\mu$, A, B, quand on prend C pour unité. Par conséquent, si l'on convient de mesurer toutes les grandeurs d'une même espèce avec une même unité choisie une fois pour toutes,

*La mesure d'une grandeur représentée par une expression de la forme* $A.\lambda + B.\mu$, $\lambda$ *et* $\mu$ *désignant des nombres quelconques, s'obtient en remplaçant, dans cette expression, les grandeurs* A *et* B *par les nombres qui les mesurent.*

En général, étant donnée une relation entre des grandeurs, des rapports de grandeurs et des nombres quelconques, on peut remplacer toutes les grandeurs qui y entrent par les nombres qui les mesurent en fonction de la même unité, sans que la relation cesse d'avoir lieu.

C'est pourquoi on désigne d'ordinaire une grandeur et le nombre qui la mesure par le même symbole. Grâce à cette convention, toute relation entre grandeurs devient une relation purement *numérique*, à laquelle on peut faire subir toutes les transformations qu'on veut, sans s'astreindre à la condition que la relation transformée ait encore un sens quand on remet les grandeurs à la place des nombres qui les mesurent.

Ainsi de la relation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, on peut déduire

$$AD = BC,$$

en ce sens que le produit des nombres qui mesurent les grandeurs A et D est égal au produit de ceux qui mesurent B et C.

## GRANDEURS PROPORTIONNELLES

359. On dit que les grandeurs d'un système sont *proportionnelles* à celles d'un autre système si, à chaque grandeur du premier système, correspond *une* grandeur du second et si le rapport de deux grandeurs quelconques du premier système est égal au rapport des grandeurs correspondantes du second.

Nous désignerons les grandeurs du premier système par A, B, C,... et les grandeurs correspondantes du second par A′, B′, C′,...

360. ***Théorème.*** — *Pour que les grandeurs de deux systèmes soient proportionnelles, il faut et il suffit que : 1° à deux grandeurs égales du premier système correspondent deux grandeurs égales du second; 2° à la somme de deux grandeurs quelconques du premier système corresponde la somme des deux grandeurs correspondantes du second.*

*Ces conditions sont nécessaires.* — En effet, supposons que les grandeurs des deux systèmes soient proportionnelles, et soient A et B deux grandeurs *égales* du premier, A′ et B′ les grandeurs correspondantes du second ; on a

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B} = 1, \quad \text{d'où } A' = B'.$$

Ensuite, soient A et B deux grandeurs du premier système ; soit $C = A + B$ ; et soient A′, B′, C′, les grandeurs du second système correspondant à A, B, C. On a

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C};$$

d'où

$$\frac{A' + B'}{C'} = \frac{A + B}{C} = 1,$$

et, par suite, $A' + B' = C'$.

*Ces conditions sont suffisantes.* — En effet, supposons qu'elles soient remplies. Il en résulte d'abord qu'à la somme d'un nombre quelconque de grandeurs A, B, C,... du premier système correspond la somme des grandeurs correspondantes du second ; car, à $A + B$, correspond $A' + B'$ ; par suite, à $(A + B) + C$, correspond $(A' + B') + C'$, etc. En particulier, à la somme de $n$ grandeurs égales à A ($n$ étant un nombre entier), correspond la somme de $n$ grandeurs égales à A′, c'est-à-dire qu'à $A.n$ correspond $A'.n$.

En outre, à $A.\frac{1}{n}$ correspond $A'.\frac{1}{n}$ ; car posons

$$B = A.\frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad B.n = A;$$

et soit B′ la grandeur du second système, correspondant à B ;

à B.$n$ correspond B'.$n$ et à A correspond A'. Donc, puisque à deux grandeurs égales du premier système correspondent deux grandeurs égales du second, on a

$$B'.n = A', \text{ ou } B' = A'.\frac{1}{n}.$$

Il est maintenant facile de démontrer que le rapport de deux grandeurs quelconques A et B du premier système est égal au rapport des grandeurs correspondantes A' et B' du second.

En effet, si le rapport $\frac{A}{B}$ est une fraction $\frac{m}{n}$, on a

$$A = B.\frac{m}{n} = \left(B.\frac{1}{n}\right).m\,;$$

or à A correspond A'; à B.$\frac{1}{n}$ correspond B'.$\frac{1}{n}$, donc à (B.$\frac{1}{n}$).$m$ correspond (B'.$\frac{1}{n}$).$m$ ou B'.$\frac{m}{n}$ ; par conséquent

$$A' = B'.\frac{m}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{A'}{B'} = \frac{m}{n} = \frac{A}{B}.$$

Supposons maintenant que le rapport $\frac{A}{B}$ soit un nombre irrationnel. Quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences $A - B.\frac{m}{n}$, $A' - B'.\frac{m}{n}$ *sont de même signe;* car si $B.\frac{m}{n} > A$, on peut trouver une grandeur C du premier système telle que

$$B.\frac{m}{n} = A + C\,;$$

d'où, en appelant C' la grandeur du second système correspondant à C,

$$B'.\frac{m}{n} = A' + C' > A.$$

On voit de même que toutes les fractions $\frac{m}{n}$ qui vérifient l'inégalité $B.\frac{m}{n} < A$ vérifient aussi l'inégalité $B'.\frac{m}{n} < A'$. Donc

[355] $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$.

361. Applications. — Considérons les arcs d'un même cercle (ou de cercles égaux) et les angles au centre correspondants.

1° Si deux arcs sont égaux, les angles au centre correspondants le sont aussi.

2° Si un arc est la somme de deux autres, l'angle au centre correspondant au premier est la somme des angles au centre correspondant aux deux autres.

Donc les angles au centre sont proportionnels aux arcs qu'ils interceptent [104].

On constate de même la proportionnalité des segments déterminés sur deux sécantes par une série de parallèles [149] et la proportionnalité des rectangles de même base et de leurs hauteurs [297].

Au contraire, les arcs d'un cercle ne sont pas proportionnels aux cordes qui les sous-tendent; car, si un arc est la somme de deux autres, la corde qui le sous-tend est moindre que la somme des cordes qui sous-tendent les deux autres.

---

# NOTE II

## TRANSFORMATIONS DU PLAN [1]

362. *Transformer* une figure, c'est la remplacer par une autre qui s'en déduise suivant une loi déterminée. Nous laisserons de côté les transformations qui ne s'appliquent qu'à une figure particulière, pour nous occuper de celles qui sont applicables à tout le plan et que nous appellerons, par suite, *des transformations du plan*. Parmi ces dernières, nous considérerons plus particulièrement les transformations *ponctuelles*, c'est-à-dire celles qui font correspondre à un point quelconque du plan un autre point de ce plan, de sorte que la *transformée* d'une figure F est le lieu des points correspondant aux points de F.

Soient $T_1$, $T_2$, $T_3$ des transformations quelconques et F une figure quelconque du plan. Supposons que $T_1$ transforme F en $F_1$, que $T_2$ transforme $F_1$ en $F_2$ et que $T_3$ transforme $F_2$ en $F_3$ ; nous appellerons *produit des transformations* $T_1$, $T_2$, $T_3$ et nous désignerons par $T_1T_2T_3$ la transformation qui change F en $F_3$.

Il est clair que la multiplication des transformations est *associative*, c'est-à-dire que, dans un produit de transformations, on peut remplacer deux ou plusieurs transformations *consécutives* par leur produit ; ainsi

$$T_1T_2T_3 = T_1(T_2T_3),$$

car $T_1$ transforme F en $F_1$ et $T_2T_3$ transforme $F_1$ en $F_3$.

---

[1] Voir, dans la Géométrie analytique de M. Niewenglowski, la *Note sur les transformations en Géométrie* de M. Borel, à laquelle nous avons fait de nombreux emprunts.

On dit que des transformations sont *échangeables* quand leur produit reste le même, quel que soit l'ordre dans lequel on les effectue ; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour des translations.

Mais, en général, il n'en est pas ainsi ; par exemple, si l'on fait une translation, puis une rotation, le résultat obtenu n'est pas le même que si l'on avait commencé par la rotation.

On appelle *groupe* un ensemble de transformations, tel que le produit de deux quelconques d'entre elles soit une transformation de l'ensemble.

Par exemple, l'ensemble des translations forme un groupe, à condition d'y comprendre la *translation nulle* ou *transformation identique* (1), qui change chaque figure en elle-même.

Nous allons passer en revue les divers groupes que l'on peut former avec les transformations ponctuelles que nous avons étudiées.

Pour abréger, nous désignerons :

Par T une translation quelconque ;

Par R une rotation ;

Par D un déplacement ;

Par V une symétrie par rapport à une droite (2), que nous appellerons désormais un *renversement* autour de cette droite ;

Par H une homothétie ;

Par S une similitude directe ou inverse ;

Par J une inversion.

De plus, nous pourrons désigner, s'il y a lieu, par un indice inférieur le point ou la droite que la transformation laisse inaltérés, et par un indice supérieur la constante qui entre dans la définition de la transformation. Ainsi :

$V_a$ représentera le renversement autour de la droite $a$ ;

$J_a^\lambda$, l'inversion de pôle $a$ et de puissance $\lambda$, etc.

---

(1) On désigne d'ordinaire cette transformation par 1, parce qu'on peut la supprimer dans un produit.

(2) Inutile de parler de la symétrie *par rapport à un point*, qui n'est qu'un cas particulier de la rotation, ou de l'homothétie.

363. Cela posé, soit $G_1$ le groupe des translations. Si on lui adjoint l'ensemble des rotations R, on forme un deuxième groupe $G_2$, qui n'est autre que le groupe des déplacements D ; car tout déplacement équivaut soit à une rotation, soit à une translation.

En adjoignant au groupe $G_2$ l'ensemble des transformations du type V ou DV, on forme un troisième groupe $G_3$. Les transformations de ce groupe s'appellent des *mouvements ;* nous les représenterons par M et nous allons montrer qu'elles se réduisent soit à un renversement, soit au produit de deux ou de trois renversements.

En effet, considérons d'abord deux renversements $V_a, V_b$, autour de deux droites *parallèles* $a$, $b$. Soient P un point quelconque du plan, P' son symétrique par rapport à $a$, P'' le symétrique de P' par rapport à $b$, A et B les points de rencontre de la droite PP'P'' avec $a$ et $b$. On a

$$\overline{PP''} = 2\overline{AP'} + 2\overline{P'B} = 2\overline{AB} ;$$

donc le produit de $V_a$ par $V_b$ équivaut à la translation représentée par le vecteur $2\overline{AB}$, et, par suite, ce produit ne change pas quand on déplace le système des deux droites $a$, $b$ parallèlement à lui-même.

On démontre, de même, que le produit de deux renversements $V_a, V_b$, autour de deux droites *concourantes* $a$, $b$, équivaut à une rotation autour du point de concours de ces deux droites ayant pour *amplitude* le double de l'angle $(a, b)$ ; par suite, le produit $V_aV_b$ ne change pas quand on fait tourner le système des deux droites $a$, $b$ autour de leur point de concours.

*Réciproquement*, on peut remplacer une translation quelconque par le produit de deux renversements autour de deux droites perpendiculaires à la translation et prendre pour l'une de ces deux droites n'importe quelle perpendiculaire à la translation.

De même, on peut remplacer une rotation quelconque par le produit de deux renversements autour de deux droites passant par le centre de la rotation, et la direction de l'une de ces deux droites peut être choisie arbitrairement.

Considérons maintenant un déplacement quelconque D. Soit P un point du plan que ce déplacement amène en P′ ; on peut remplacer D par la translation T, représentée par le vecteur $\overline{PP'}$, suivie d'une rotation R autour de P′. Ensuite, on peut remplacer T par deux renversements successifs autour de deux droites *a*, *b*, perpendiculaires à PP′, dont la seconde passe par P′ ; enfin, remplacer R par deux renversements successifs autour de deux droites passant par P′, dont la première coïncide avec *b*. Soit *c* la seconde ; on a

$$D = V_a V_b V_b V_c,$$

ou $D = V_a V_c$, puisque les deux renversements successifs $V_b$ se détruisent [1].

Il en résulte que tout mouvement du type $DV_a$ est le produit de trois renversements. On peut pousser plus loin la réduction.

Si D est une translation, on peut la remplacer par deux autres : l'une T parallèle à *a*, l'autre T′ perpendiculaire à *a* ; puis remplacer T′ par deux renversements successifs autour de deux droites parallèles dont la seconde coïncide avec *a*. Soit *b* la première ; on a

$$DV_a = TV_b V_a V_a = TV_b.$$

Si D est une rotation, on peut la remplacer par deux renversements successifs autour de deux droites *b*, *c*, dont la seconde soit parallèle à *a* ; de sorte que

$$DV_a = V_b V_c V_a.$$

On pourra remplacer V $V_a$ par une translation, et le reste comme dans le cas précédent. Par conséquent,

*Tout mouvement du type* DV *est le produit d'une translation*

[1] $V_a V_c$ équivaut à une rotation autour du point de concours de *a* et de *c* ; donc notre raisonnement prouve une fois de plus que tout déplacement équivaut à une rotation, à moins qu'il ne se réduise à une translation.

*par un renversement autour d'une droite parallèle à la translation.*

364. En adjoignant au groupe $G_3$ l'ensemble des transformations du type H ou MH, on forme un groupe $G_4$, qui n'est autre que le groupe des similitudes directes ou inverses S.

Les similitudes *directes* constituent ce qu'on appelle un *sous-groupe* de $G_4$ [172]. Il en est, de même, [167] de l'ensemble des homothéties et des translations.

365. Enfin, nous allons démontrer qu'en adjoignant au groupe $G_4$ l'ensemble des transformations du type J ou SJ, on forme un nouveau groupe $G_5$.

***Théorème.*** — *Toute transformation du type* JV *peut se ramener au type* VJ.

En effet, on voit immédiatement que

$$J_a^\alpha V_\Delta = V_\Delta J_b^\alpha,$$

en appelant $b$ le symétrique du point $a$ par rapport à la droite $\Delta$.

Corollaires. — I. — *Toute transformation du type* JM *peut se ramener au type* MJ ; car on peut remplacer M par un ou plusieurs renversements.

II. — *Toute transformation du type* JH *peut se ramener au type* J *ou* MJ. D'abord, si le centre de l'homothétie H coïncide avec le pôle de l'inversion J, le produit JH équivaut manifestement à une simple inversion. Ensuite, si l'homothétie H est quelconque, on peut la remplacer par une homothétie H′ ayant pour centre le pôle de J, suivie d'une translation T ; donc

$$JH = JH'T.$$

Or JH′ équivaut à une simple inversion, et T est un mouvement ; donc on est ramené au cas précédent.

***Théorème.*** — *Le produit de deux inversions* $J_A^\alpha$, $J_B^\beta$ *de pôles différents peut se ramener au type* VJ.

Soient (fig. 280) M un point quelconque du plan ; N le transformé de M par $J_A^\alpha$; P le transformé de N par $J_B^\beta$; on a

$$\overline{AM}.\overline{AN} = \alpha$$
$$\overline{BN}.\overline{BP} = \beta.$$

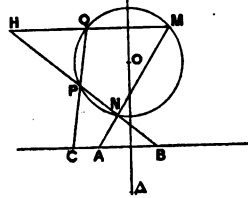


Fig. 280.

Traçons le cercle circonscrit au triangle MNP, et soit Q le second point de rencontre de ce cercle avec la parallèle à AB menée par M. Menons QP, qui rencontre AB en C ; et posons

$$\overline{CP}.\overline{CQ} = \gamma.$$

Nous allons prouver que la perpendiculaire Δ au milieu de MQ est indépendante de M, ainsi que le point C et le nombre γ.

En effet, Δ passe par le centre O du cercle ; or, en appelant $r$ le rayon de ce cercle, on a

$$\overline{OA}^2 - r^2 = \alpha,$$
$$\overline{OB}^2 - r^2 = \beta;$$

d'où

$$\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = \alpha - \beta.$$

Par conséquent, la droite Δ n'est autre que le lieu des points tels que la différence des carrés de leurs distances aux points A et B soit égale à $\alpha - \beta$ ; donc elle est indépendante de M.

Ensuite, AC étant parallèle à MQ est antiparallèle à NP par rapport aux deux droites AN et CP ; donc

$$\overline{BA}.\overline{BC} = \overline{BN}.\overline{BP} = \beta;$$

ce qui détermine le point C; après quoi, le nombre γ est déterminé par la relation [212]

$$\alpha.\overline{BC} + \beta.\overline{CA} + \gamma.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0,$$

qui se réduit ici à

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}.$$

Or Q est le transformé de M par le renversement $V_\Delta$ et P le transformé de Q par l'inversion $J_C^\gamma$; donc

$$J_A^\alpha J_B^\beta = V_\Delta J_C^\gamma .$$

REMARQUE. — *Le produit de deux inversions de même pôle se réduit évidemment à une simple homothétie.*

COROLLAIRE. — *Le produit de deux transformations du type* VJ *peut se ramener à l'une des formes* MJ *ou* DH.

En effet, soit P ce produit ; on a

$$P = (VJ)(V'J') = V(JV')J'.$$

Or [365] on peut ramener JV′ à la forme V′J″ ; donc

$$P = V(V'J'')J' = VV'(J''J').$$

Si les inversions J″ et J′ ont même pôle, on peut les remplacer par une homothétie H. D'ailleurs, VV′ est un déplacement; donc, dans ce cas, P = DH.

Si les inversions J″ et J′ ont des pôles différents, on peut ramener J″J′ à la forme V″J‴ ; donc

$$P = VV'(V''J''') = (VV'V'')J'''.$$

Mais VV′V″ est un mouvement M; donc, dans ce cas, P = MJ‴.

CONCLUSION. — De ce qui précède, on déduit sans peine que le produit de deux transformations du type

S, J, ou SJ

peut se ramener à ce même type. Donc toutes les transformations de cette forme constituent un groupe $G_5$, qu'on appelle le groupe *conforme*, parce que toutes ces transformations conservent les angles.

## NOTE III

# SUR LA MESURE DES POLYGONES

366. Nous appelons *polygone* une portion de plan limitée par une ligne brisée fermée dont les côtés ne se croisent pas.

Il est d'abord indispensable de donner une définition *unique* et précise de l'*équivalence* de deux polygones et de la *somme* de plusieurs polygones.

Nous dirons que deux polygones sont *équivalents* lorsqu'on peut les décomposer en polygones partiels superposables chacun à chacun, *et seulement dans ce cas.*

Nous dirons qu'un polygone A est la *somme* de plusieurs polygones B, C, D, lorsqu'on peut le décomposer en polygones partiels respectivement équivalents à B, C, D.

367. PROBLÈME. — *Transformer un rectangle en un rectangle équivalent ayant pour base une longueur donnée.*

Pour traiter cette question, qui est fondamentale dans notre théorie, avec toute la rigueur désirable, nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Deux polygones* A *et* B *équivalents, à un troisième* C, *sont équivalents l'un à l'autre.*

En effet, puisque C est à la fois équivalent à A et à B, on peut décomposer C en polygones $\alpha$ avec lesquels on puisse former A et en polygones $\beta$ avec lesquels on puisse former B. Si l'on trace à la fois, dans C, les lignes qui limitent les $\alpha$ et celles qui limitent les $\beta$, C se trouvera décomposé en polygones $\gamma$, avec lesquels on pourra former soit A, soit B ; dès lors A et B, étant formés des mêmes polygones partiels, sont équivalents.

Cela posé, soit ABCD (fig. 281) un rectangle, qu'il s'agit de transformer en un autre rectangle équivalent ayant pour base une longueur donnée $\lambda$. Prenons, sur le prolongement de CD, une longueur $DE = \lambda$, traçons AE et menons par B la parallèle à AE, qui rencontre en F la perpendiculaire à DE menée par E. Je dis que le rectangle DEFG construit sur DE et EF est équivalent au rectangle donné ABCD. En effet, ces deux rectangles sont respectivement équivalents aux parallélogrammes AEFH, AEIB, comme ayant même base et même hauteur que ces parallélogrammes [304]. Mais ces deux parallélogrammes sont eux-mêmes équivalents, comme ayant même base AE et même hauteur; donc, en vertu du lemme, les deux rectangles le sont aussi.

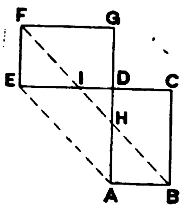


Fig. 281.

368. Un polygone quelconque étant donné, on peut toujours le décomposer en triangles, transformer ces triangles en parallélogrammes, puis en rectangles équivalents, enfin transformer ces rectangles en d'autres rectangles équivalents ayant pour base commune une longueur $\lambda$ arbitrairement choisie ; de sorte que, si H désigne la somme des hauteurs de ces derniers rectangles, le polygone donné se trouvera transformé en un rectangle équivalent de base $\lambda$ et de hauteur H. Par conséquent, deux polygones quelconques peuvent être transformés en deux rectangles équivalents *de même base : le rapport des deux polygones sera égal au rapport des hauteurs de ces deux rectangles*. On arrive ainsi, par un procédé entièrement géométrique, à déterminer le rapport de deux polygones. Mais on peut décomposer un polygone en triangles d'une infinité de manières et, d'ailleurs, on peut imaginer bien d'autres procédés de comparaison que celui que nous venons d'indiquer. Il est donc absolument indispensable de démontrer que le rapport de deux polygones est un nombre *déterminé, indépendant du procédé employé pour comparer les deux polygones*.

369. Imaginons un observateur debout sur le plan et pouvant

marcher à volonté sur le plan, mais en restant toujours, bien entendu, d'un même côté du plan. Cet observateur peut parcourir le périmètre d'un polygone dans deux sens différents; nous dirons qu'il le parcourt dans le sens *direct*, ou dans le sens *rétrograde*, selon qu'il a constamment l'intérieur du polygone à sa gauche, ou à sa droite. De plus, nous dirons, pour abréger, qu'un point A est *à gauche* ou *à droite d'un vecteur* BC, selon qu'il est à gauche ou à droite de l'observateur parcourant la droite indéfinie BC dans le sens BC.

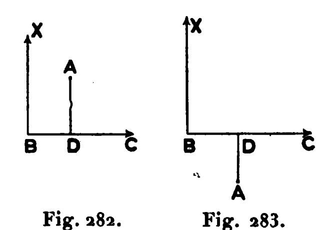


Fig. 282. Fig. 283.

Nous appelons *moment d'un vecteur* BC *par rapport à un point* A (fig. 282 et 283) et nous désignons par la notation (ABC) la moitié du produit de la longueur de ce vecteur par la mesure algébrique de sa distance DA au point A, considérée comme positive ou négative, selon que le point A est à gauche, ou à droite, du vecteur BC.

Ainsi, dans le cas de la figure 282,

$$(ABC) = \frac{1}{2}BC \times (+ DA);$$

et, dans le cas de la figure 283,

$$(ABC) = \frac{1}{2}BC \times (- DA).$$

Dans les deux cas, nous écrirons

$$(ABC) = \frac{1}{2}BC \times \overline{DA},$$

en prenant pour direction positive de $\overline{DA}$ la perpendiculaire $\overline{BX}$ au vecteur BC menée *du côté gauche de ce vecteur* (1).

(1) En supposant le plan *orienté* [45] de façon que le *sens direct de rotation* soit le sens dans lequel l'observateur doit parcourir une circonférence pour avoir constamment le centre du cercle à sa gauche, ceux de nos lecteurs qui connaissent la définition du *sinus* verront immédiatement que (ABC) représente le produit $\frac{1}{2}$ BC.BA.sin$(\overline{BC}, \overline{BA})$.

Il résulte immédiatement de cette définition que

$$(ABC) = -(ACB).$$

***Théorème.*** — (ABC) = (BCA) = (CAB), *c'est-à-dire* (fig. 284 et 285) *que le moment de* BC *par rapport au point* A,

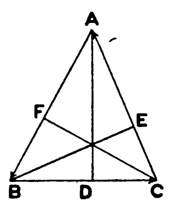


Fig. 284.

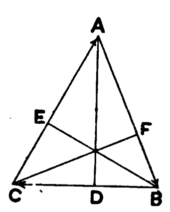


Fig. 285.

*celui de* CA *par rapport au point* B *et celui de* AB *par rapport au point* C *sont égaux.*

En effet, dans le triangle ABC, abaissons les hauteurs AD, BE, CF; nous savons déjà [185] que

$$BC \times DA = CA \times EB = AB \times FC,$$

en vertu de la similitude des triangles CDA et CEB, AEB et AFC. Donc nos trois moments ont même valeur absolue. Reste à prouver qu'ils sont de même signe; pour cela, nous distinguerons deux cas, selon que l'observateur parcourant le périmètre du triangle dans le sens BCA a constamment l'intérieur du triangle à sa gauche, ou à sa droite. Dans le premier cas, nos trois moments sont positifs; dans le second, ils sont négatifs. Donc, dans les deux cas, ils sont égaux.

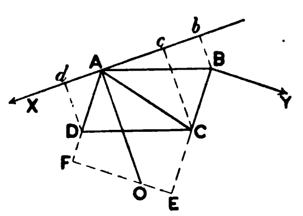


Fig. 286.

370. ***Théorème de Varignon.*** — *Soient* (fig. 286) ABCD *un parallélogramme et* O *un point quelconque du plan*; *on a*

$$(OAB) + (OCA) + (OAD) = 0.$$

En effet, projetons les points B, C, D en *b*, *c*, *d* sur la

perpendiculaire à OA menée par A. On a, en vertu du théorème précédent,

$$(OAB) = (BOA) = \frac{1}{2} OA \times \overline{Ab},$$

$$(OCA) = (CAO) = -(COA) = -\frac{1}{2} OA \times \overline{Ac},$$

$$(OAD) = (DOA) = \frac{1}{2} OA \times \overline{Ad}.$$

Mais, les vecteurs AD, BC étant équipollents, leurs projections A$d$, $bc$ le sont aussi ; donc

$$(OAD) = \frac{1}{2} OA \times \overline{bc}.$$

Par conséquent,

$$(OAB) + (OCA) + (OAD) = \frac{1}{2} OA(\overline{Ab} + \overline{bc} - \overline{Ac})$$
$$= \frac{1}{2} OA(\overline{Ac} - \overline{Ac}) = 0.$$

371. ***Théorème.*** — *Soient* (fig. 286) O, A, B, C *quatre points quelconques du plan, on a*

$$(OBC) + (OCA) + (OAB) = (ABC).$$

En effet, soit D le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AB et BC, et soient E, F les points de rencontre des droites BC, AD avec la perpendiculaire commune à ces deux droites menée par O. On a

$$(OBC) = \frac{1}{2} BC . \overline{EO},$$

en prenant pour direction positive des vecteurs portés par EF la demi-droite BY menée perpendiculairement au vecteur BC du côté gauche de ce vecteur. Or $\overline{EO} = \overline{EF} + \overline{FO}$ ; donc

$$(OBC) = \frac{1}{2} BC . \overline{EF} + \frac{1}{2} AD . \overline{FO}.$$

mais $\frac{1}{2}BC.\overline{EF}$ et $\frac{1}{2}AD.\overline{FO}$ sont respectivement le moment de BC par rapport au point A et celui de AD par rapport au point O. Donc

$$(OBC) = (ABC) + (OAD).$$

Or, en vertu du théorème précédent,

$$(OCA) + (OAB) + (OAD) = 0 ;$$

Donc, en ajoutant membre à membre et simplifiant, il vient

$$(OBC) + (OCA) + (OAB) = (ABC).$$

372. Cela posé, considérons un polygone quelconque P et supposons que l'observateur, parcourant le périmètre de ce polygone dans le sens *direct*, rencontre les sommets dans l'ordre A, B, C, ..., L; nous appellerons *puissance du polygone* P, et nous désignerons par la notation $|P|$, la somme des moments des vecteurs AB, BC, ..., LA, successivement parcourus, par rapport à un point quelconque O du plan que nous appellerons le *centre des moments*. Ainsi

$$|P| = (OAB) + (OBC) + ... + (OLA).$$

Il résulte immédiatement de cette définition que, si un polygone est formé par la réunion de plusieurs autres, la puissance du polygone total est la somme des puissances des polygones partiels. En effet, soit ABCDE (fig. 287) un polygone formé par la réunion des deux polygones ABCD et ADE; si nous supposons, pour fixer les idées, que l'observateur parcourant le côté DA, dans le sens DA, ait l'intérieur du polygone ABCD à sa gauche et, par suite, celui du polygone ADE à sa droite, on a

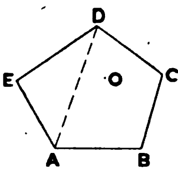


Fig. 287.

$$|ABCD| = (OAB) + (OBC) + (OCD) + (ODA),$$
$$|DAE| = (OAD) + (ODE) + (OEA);$$

en ajoutant membre à membre et en remarquant que

$$(ODA) + (OAD) = 0,$$

on voit que la somme des puissances des polygones ABCD, ADE est égale à

$$(OAB) + (OBC) + (OCD) + (ODE) + (OEA),$$

c'est-à-dire égale à la puissance du polygone total ABCDE.

373. Considérons, en particulier, un triangle ABC (fig. 284) et supposons que l'observateur, parcourant le périmètre de ce triangle dans le sens direct, rencontre les sommets dans l'ordre A, B, C, la puissance de ce triangle sera égale à

$$(OBC) + (OCA) + (OAB),$$

par conséquent [371], égale à (ABC), c'est-à-dire au moment de BC par rapport au point A. Mais, puisque le point A est, par hypothèse, à gauche du vecteur BC, ce moment est positif et égal à la moitié du produit du côté BC par la hauteur correspondante. Donc :

*La puissance d'un triangle est un nombre positif déterminé, indépendant de la position du centre des moments, par suite, indépendant de la position du triangle dans le plan.*

374. Il en est de même de la puissance d'un polygone quelconque, puisqu'un polygone peut toujours être décomposé en triangles et que sa puissance est la somme de celles des triangles qui le composent.

Par conséquent, deux polygones superposables ont même puissance, et il en est de même de deux polygones *équivalents,* c'est-à-dire formés de polygones partiels superposables chacun à chacun.

En résumé, la puissance d'un polygone est un nombre positif déterminé jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Deux polygones équivalents ont des puissances égales;

2° Si un polygone est la somme de deux autres polygones, sa puissance est la somme de celles de ces deux autres.

Il en résulte [360] qu'un polygone est *proportionnel* à sa puissance, c'est-à-dire que le rapport de deux polygones P et Q est égal au rapport de leurs puissances; du reste, il est facile de le vérifier.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé une fraction $\frac{m}{n}$ telle que

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n};$$

cela veut dire qu'on a trouvé un troisième polygone R tel que

$$Q = nR \text{ et } P = mR.$$

Par conséquent,

$$|Q| = n|R| \quad \text{et} \quad |P| = m|R|;$$

donc le rapport des puissances $|P|$ et $|Q|$ des deux polygones est aussi égal à $\frac{m}{n}$.

De même, si l'on a trouvé une fraction $\frac{m}{n}$, telle que

$$\frac{P}{Q} > \frac{m}{n},$$

cela veut dire qu'on a trouvé un troisième polygone R tel que

$$Q = nR \text{ et } P > mR.$$

Par conséquent,

$$|Q| = n|R| \text{ et } |P| > m|R|;$$

donc le rapport des puissances $|P|$ et $|Q|$ des deux polygones est aussi plus grand que $\frac{m}{n}$.

Enfin, si l'on a trouvé une fraction $\frac{m}{n}$ telle que $\frac{P}{Q} < \frac{m}{n}$, on a aussi $\frac{|P|}{|Q|} < \frac{m}{n}$.

Donc, dans tous les cas,

$$\frac{P}{Q} = \frac{|P|}{|Q|}.$$

Par conséquent, le rapport de deux polygones est un nombre *déterminé, indépendant du procédé employé pour comparer les deux polygones.*

375. Supposons que Q soit le carré ayant pour côté l'unité de longueur : en prenant pour centre des moments un sommet du carré, on voit immédiatement que sa puissance est égale à 1 ; donc $|Q| = 1$ et l'égalité précédente devient

$$\frac{P}{Q} = |P|.$$

d'où ce théorème :

*Quand on prend pour unité le carré qui a pour côté l'unité de longueur, la mesure d'un polygone quelconque est égale à sa puissance.*

376. On peut tourner le raisonnement, de manière à éviter les considérations de signes, en appelant *puissance d'un triangle* la moitié du produit de l'un quelconque de ses côtés par la hauteur correspondante, et *puissance d'un trapèze* le produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.

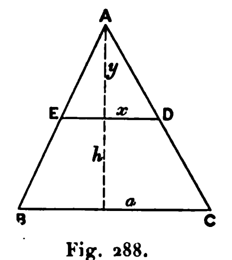


Fig. 288.

1° Si, dans un triangle ABC (fig. 288), on mène une droite DE parallèle à la base BC, la somme des puissances du triangle ADE et du trapèze BCDE est égale à la puissance du triangle total ABC.

En effet, posons

$$BC = a, \qquad DE = x,$$

et désignons par $h$ la hauteur du triangle ABC, par $y$ celle du triangle ADE, par $h - y$ celle du trapèze BCDE. On a

$$\text{puiss. ADE} + \text{puiss. BCDE} = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}(a + x)(h - y)$$
$$= \frac{1}{2}(ah + hx - ay).$$

Or les triangles semblables ABC, AED donnent

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{h}, \qquad \text{d'où} \qquad hx = ay ;$$

par conséquent,

$$\text{puiss. ADE} + \text{puiss. BCDE} = \frac{1}{2}\, ah = \text{puiss.ABC}.$$

2° Il en résulte immédiatement que, si l'on décompose un triangle en un triangle et plusieurs trapèzes, par des sécantes parallèles à l'un des côtés, la puissance du triangle total est la somme des puissances de ses parties.

3° Si l'on décompose un triangle en deux triangles partiels par une sécante $\Delta$ passant par l'un des sommets, la somme des puissances de ces deux triangles partiels est égale à la puissance du triangle total. De plus, si l'on décompose chacun de ces deux triangles partiels en un triangle et plusieurs trapèzes, par des sécantes parallèles à $\Delta$, la puissance du triangle total est encore égale à la somme des puissances de toutes ses parties.

4° Si l'on décompose un trapèze en trapèzes et en triangles, ayant même hauteur que le trapèze primitif, par des droites joignant un point de l'une des bases à un point de l'autre, la puissance du trapèze total est évidemment égale à la somme des puissances de ses parties.

5° Si l'on décompose un triangle T en triangles partiels $\theta$ d'une façon quelconque, la puissance du triangle T est égale à la somme des puissances des triangles $\theta$. Car, en menant par tous les sommets des triangles $\theta$ des sécantes parallèles à une direction quelconque, on décompose le triangle T en deux triangles et plusieurs trapèzes ; la somme des puissances de ces triangles et de ces trapèzes est, d'une part [3°], égale à celle du triangle T, d'autre part [4°], égale à la somme de celles des triangles $\theta$.

6° Si l'on décompose un polygone P en triangles d'une façon quelconque, la somme des puissances de ces triangles est indépendante du mode de décomposition.

En effet, supposons qu'on ait partagé le polygone P en un premier système de triangles $\alpha$, puis en un deuxième système de triangles $\beta$. Les côtés de tous ces triangles $\alpha$ et $\beta$ partagent le polygone P en un réseau de polygones partiels, qu'on pourra décomposer en triangles ; de sorte que le polygone P se trou-

vera partagé en un troisième système de triangles $\gamma$, tels que chaque triangle $\alpha$ et chaque triangle $\beta$ se composent de plusieurs triangles $\gamma$. Par conséquent, la somme des puissances des triangles $\alpha$ et celle des puissances des triangles $\beta$ seront toutes deux égales à celle des puissances des triangles $\gamma$ ; donc elles sont égales entre elles.

Leur valeur commune est donc un *invariant du polygone* P, que nous appellerons *la puissance du polygone*.

D'ailleurs, si un polygone est formé par la réunion de plusieurs autres, il est clair que sa puissance est la somme de celles des polygones partiels. On en conclut, comme ci-dessus, que l'on peut prendre la puissance d'un polygone *pour mesure de ce polygone*.

377. Nous appelons *circuit polygonal fermé* ou simplement *circuit* une brisée fermée parcourue dans un sens déterminé.

Nous appelons *puissance d'un circuit* ABC.... LA, et nous désignons par la notation [ABC.... LA] la somme des moments des vecteurs AB, BC,..., LA, qui le composent, par rapport à un point quelconque O du plan.

La puissance ainsi définie est indépendante de la position du point O.

En effet, considérons d'abord un circuit triangulaire ABCA. On a

$$[ABCA] = (OAB) + (OBC) + (OCA),$$

ou [371]

$$[ABCA] = (ABC).$$

Ensuite, pour un circuit quadrangulaire ABCDA, on a

$$[ABCDA] = (OAB) + (OBC) + (OCD) + (ODA).$$

Mais

$$(OAB) + (OBC) + (OCA) = (ABC),$$
$$(OAC) + (OCD) + (ODA) = (ACD);$$

d'où, en ajoutant membre à membre et remarquant que $(OCA) + (OAC) = 0$,

$$[ABCDA] = (ABC) + (ACD).$$

En général, la puissance d'un circuit quelconque ABCD.... KLA, étant définie par l'égalité

$$[ABCD...KLA] = (OAB) + (OBC) + ... + (OLA), \qquad (1)$$

on en déduira

$$[ABCD...KLA] = (ABC) + (ACD) + ... + (AKL). \qquad (2)$$

378. Remarques. — Si l'un des côtés d'un circuit est parcouru deux fois de suite en sens contraires, on peut le supprimer, sans altérer la puissance du circuit. Ainsi

$$[ABCBDA] = [ABDA].$$

Si, dans un circuit ABCDEFA, plusieurs vecteurs successifs BC, CD, DE sont *portés par la même droite*, on peut les remplacer par leur somme BE, et réciproquement, sans altérer la puissance du circuit.

Nous dirons qu'un circuit est la *somme* de plusieurs autres quand il s'obtient en parcourant successivement tous les vecteurs qui composent ces autres circuits. Ainsi ABCDAEFA est la somme des circuits ABCDA et AEFA. La puissance du circuit total est évidemment la somme des puissances des circuits partiels.

379. *Signification géométrique de la puissance d'un circuit.*

1° Un circuit ABC...LA, *dont les côtés ne s'entre-croisent pas* limite une portion de plan; c'est le périmètre du polygone ABC...L, parcouru dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. Dans le premier cas, la puissance du circuit est la même que celle du polygone, elle est donc [375] égale au nombre qui mesure le polygone ; dans le second cas, elle est égale à ce même nombre précédé du signe —. Dans les deux cas, nous dirons que la puissance du circuit ABC... LA est la *mesure algébrique du polygone* ABC...L.

En particulier, [ABCA] ou (ABC) est égal au nombre qui mesure le triangle ABC, précédé du signe + ou du signe —, suivant que l'observateur, parcourant le périmètre du triangle de manière à rencontrer les sommets dans l'ordre A, B, C, a l'intérieur du triangle à sa gauche ou à sa droite.

2° Un circuit *dont les côtés s'entre-croisent* peut toujours être regardé comme la somme de plusieurs circuits, dont les côtés ne s'entre-croisent pas; les puissances de ces circuits partiels sont les mesures algébriques de certains polygones; la puissance du circuit total est donc la somme des mesures algébriques de tous ces polygones.

380. Nous conviendrons de dire qu'un circuit, dont les côtés s'entre-croisent, est un polygone *croisé*, ayant pour mesure la puissance du circuit. Moyennant cette convention; l'égalité (1) peut s'énoncer en disant :

*La mesure d'un polygone quelconque* ABC...KL, *croisé ou non, est la somme des mesures algébriques des triangles* OAB, OBC, ..., OLA, *quel que soit le point* O.

En particulier, on pourra faire coïncider le point O avec l'un des sommets, ce qui donne l'égalité (2).

381. *Trapèze croisé.* — Soit (fig. 289) un trapèze ABCD, de hauteur $h$, dont les côtés BC et DA se croisent en O. Le circuit ABCDA est la somme des deux circuits OABO, OCDO, dont l'un est le périmètre du triangle OAB, parcouru dans le sens direct, et l'autre, le périmètre du triangle OCD, parcouru dans le sens rétrograde. Donc la puissance du circuit ABCDA, c'est-à-dire *la mesure du trapèze croisé* ABCD, est la différence des triangles OAB et OCD ou, ce qui revient au même, la différence des triangles ABC et ACD; par conséquent, elle a pour expression

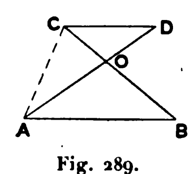


Fig. 289.

$$\frac{1}{2}\,AB \times h - \frac{1}{2}\,CD \times h = \frac{1}{2}(AB - CD)h.$$

D'où ce théorème :

*La mesure d'un trapèze croisé est égale au produit de la demi-différence des bases par la hauteur.*

# TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION



## LIVRE I

CHAPITRE PREMIER. — DES ANGLES



CHAPITRE II. — DES PARALLÈLES



CHAPITRE III. — POLYGONES, TRIANGLES

CHAPITRE II. — LIGNES PROPORTIONNELLES



CHAPITRE III. — HOMOTHÉTIE



CHAPITRE IV. — SIMILITUDE



CHAPITRE V. — RELATIONS MÉTRIQUES

CHAPITRE VI. — TRANSVERSALES, POLAIRES, INVERSION



CHAPITRE VII. — POLYGONES RÉGULIERS

Pages.

### CHAPITRE VIII. — LONGUEUR DE LA CIRCONFÉRENCE



## LIVRE IV

### CHAPITRE PREMIER. — MESURE DES AIRES



### CHAPITRE II. — COMPARAISON DES AIRES

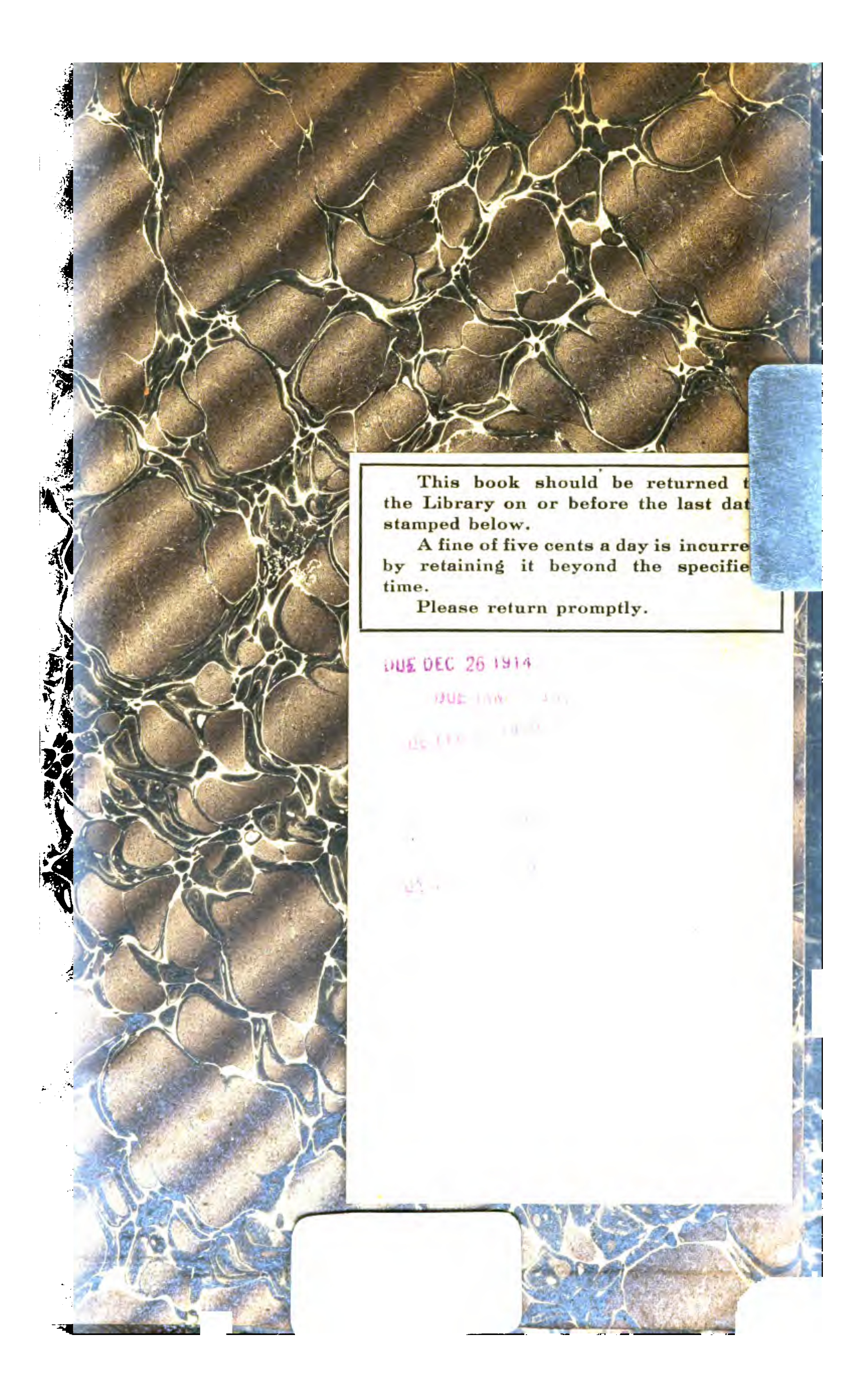


### NOTE II. — SUR LES TRANSFORMATIONS DU PLAN



ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY





This book should be returned t
the Library on or before the last dat
stamped below.
A fine of five cents a day is incurre
by retaining it beyond the specifie
time.
Please return promptly.
DUE DEC 26 1914


Math 5108.98.3
Cours de geometrie elementaire
Cabot Science
003334288
3 2044 091 903 559